SPT 21世纪高等院校教材 理工类

实变函数与泛函分析基础教程

上海交通大学国家工科数学教学基地
邵国年 编

科学出版社

(O-1593.0101)

责任编辑：吕 虹 责任印制：安春生



ISBN 7-03-010178-2/O·1593

定 价：19.00 元

21 世纪高等院校教材(理工类)

实变函数与泛函分析基础教程

上海交通大学国家工科数学教学基地

邵国年 编

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是编者经过多年的教学实践逐步形成的. 全书由实变函数与泛函数分析两部分内容组成, 共分十章. 第一、第二章介绍集合与点集拓扑的一些基本概念; 第三至第五包括一般的测度、可测函数与积分理论; 第六至第八章介绍赋范线性空间、内积空间与泛函分析的若干基本定理; 第九章简单介绍 Banach 代数和全连续算子的谱; 第十章为附录. 在第一至第八章的每章末尾还配有一定数量的习题.

本书可作为数学与应用数学专业本科生的教学参考书或教材, 其中的第六至第八章及第九章的部分内容也可作为工科研究生"应用泛函分析"课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析基础教程/邵国年编. 一北京: 科学出版社, 2002

ISBN 7-03-010178-2

(21 世纪高等院校教材(理工类))

Ⅰ. 实… Ⅱ. 邵… Ⅲ. ①实变函数-教材②泛函分析-教材 Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008634 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2002 年 5 月第一次印刷 印张: 14

印数: 1—3 000 字数: 247 000

定价: 19.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书是编者在上海交通大学应用数学系多年教学的基础上逐步编写而成的.实变函数与泛函分析已是一门比较成熟的数学专业基础理论课程,编者根据上海交通大学应用数学专业本科教学的实际需求与可能,对内容进行了一定的取舍.在"实变函数"部分,适当增加了"拓扑空间"的若干基本概念的介绍;在测度论中,直接引入集合代数与 σ 代数及一般测度的初步理论,而将经典的 Lebesgue 测度作为其特例,并由此展开相应的可测函数与积分理论;对广义测度与复测度也作了简要介绍;同时淡化了对某些具体的实函数的性质的深入探究,且将有关有界变差函数与绝对连续函数的讨论置于附录之中.在"泛函分析"部分,仍限于赋范线性空间、内积空间及有界线性算子与泛函的基本内容,但对部分内容进行了适当的简化.例如:基于一般测度的积分理论,l^p 空间只是作为 L^p 空间的特例;在 Hilbert 空间理论中将 Fourier 展开定理置于更加明确的中心地位.由于实际教学时数的限制与学生已有知识的局限,也囿于编者的水平,本书很少涉猎有关理论的应用实例,这不能不说是一大缺憾.

本书作为教材,编者在编写过程中无疑会参阅国内外大量有关书籍、文献,并从中汲取合适的素材,不再一一指出.需要特别说明的是,期间何琛先生始终给予了编者很多指点与关怀,先生当年在我校教师进修班同名课程的授课笔记乃是编者案头的主要参考资料,在此谨表示深深的敬意.

最后,衷心感谢我系有关领导的鼎力支持,使得本书得以顺利地出版.

编　者

2000 年 9 月

目　　录

第一章　集　　合

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的概念

所谓一个“集合”(或“集”),是指在一定范围内可以互相区别的事物的汇集.构成一个集合的每一事物称为该集合的元素或点.

若 x 是构成集合 A 的事物之一,则称 A 含有 x,或称 x 属于 A,记作 $x \in A$.反之,若 x 不是构成集合 A 的事物,则称 A 不含有 x,或称 x 不属于 A,记作 $x \notin A$.

对事物 x 与集合 A 来说,关系“$x \in A$”与“$x \notin A$”中有且只有一个成立.

为了方便,我们引进所谓不含任何元素的集合,称之为空集,记为 $\varnothing$.

注意,一个集合中的各个元素必须是彼此互异的,在集合的表示中相同的元素只出现一次.

1.1.2　集合的相等与包含关系

若集合 A 的元素均为集合 B 的元素,即

$$x \in A \Rightarrow x \in B,$$

则称 A 为 B 的子集,并称 A 包含于 B,或 B 包含 A,记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.若 A 与 B 的元素完全一致,即

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B,$$

则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$,则称 A 为 B 的真子集.

规定空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

关系“$\subset$”满足:

(i) $A \subset A$;

(ii) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则 $A = B$;

(iii) 若 $A \subset B$,$B \subset C$,则 $A \subset C$.

1.1.3　集合的运算

由集合 A 中的所有元素与集合 B 中的所有元素汇集在一起所构成的集合称为 A 和 B 的并集,记为 $A \cup B$,即

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由 A 和 B 的一切共有元素所构成的集合称为 A 和 B 的交集，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

特别地，若 $A \cap B = \varnothing$，即 A 和 B 无共有元素，则称 A 和 B 不相交.

由一切属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 $A \subset X$，则 $X \setminus A$ 称为 A 关于 X 的余集（或补集），记为 $C_X A$，如果没有必要标出 X，也可简记为 A^C.

关于“并”、“交”和“余”有以下运算性质：

(i) 交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(ii) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(iv) 对偶律 (De Morgan 公式) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

1.1.4 集族

若集合 $\mathscr{A}$ 的元素本身都是集合 X 的子集，则称 $\mathscr{A}$ 为集合 X 上的一个集族. 记号 $\bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 与 $\bigcap\limits_{A \in \mathscr{A}} A$ 分别表示 $\mathscr{A}$ 中所有元素（作为 X 的子集）的并集与交集.

以后若无特别说明，记号 $\mathscr{P}(X)$ 表示以集合 X 的一切子集为其元素的集族，并称之为 X 的幂集（合）.

如果除了集合 X 之外，另有一个集合 Λ（称为指标集），使得对于 Λ 中的每一个元素 λ，有 X 的一个子集与之对应，这样就得到 X 上的一个集族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$，简记为 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，并称之为由指标集 Λ 所确定的 X 上的集族，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ 与 $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. 特别地，若 $\Lambda = \{1, 2, \cdots, n\}$ 则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\{A_k\}_{1 \leqslant k \leqslant n}$，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 与 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. 又若 Λ 为自然数集 $\mathbf{N}$，则记 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ 或 $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$，其并与交分别记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 与 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$; $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ 通常称为集合序列，简称为集列. 若 n 为一自然数，则记号 $\{A_k\}_{k \geqslant n}$, $\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 以

及$\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k$的意义是显见的.

需要特别指出的是,在集族的表示中并不要求当$\alpha\neq\beta$时有$A_\alpha\neq A_\beta$,对集合序列也有同样的说明.以后,我们将集列$\{A_n\}_{n\geq 1}$简记为(A_n).

1.1.5 集合序列的极限

定义 1.1.1 设(A_n)为一集列,令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k;\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k,$$

分别称$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$与$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$为集列$(A_n)$的上限集与下限集.若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称集列$(A_n)$的极限存在或收敛,且记其极限(集)为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

定理 1.1.1 设(A_n)为一集列,则

(1) $x\in\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$的充要条件是有无穷多个$A_n$含有$x$;

(2) $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$的充要条件是存在$n_x\in\mathbf{N}$当$n\geq n_x$时恒有$x\in A_n$.

证明留作练习.

定义 1.1.2 设(A_n)为一集列,若$A_n\subset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则称该集列是递增的,记为$A_n\uparrow$;若$A_n\supset A_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则称该集列是递减的,记为$A_n\downarrow$.递增与递减集列统称为单调集列.

定理 1.1.2 设(A_n)为一集列,

(1) 若$A_n\uparrow$,则(A_n)收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$;

(2) 若$A_n\downarrow$,则(A_n)收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

证明留作练习.

1.1.6 集族的直积(集)

设A,B是两个集合,令

$$A\times B := \{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\},$$

称为集合A和B的直积集(Cartesian 积集).规定

$$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)\Leftrightarrow a_1=a_2\text{ 且 }b_1=b_2.$$

类似地,n个集合$A_k(1\leq k\leq n)$的直积定义为

$$\prod_{k=1}^{n}A_k := \{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_k\in A_k,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

关于一般的集族的直积,需利用“选择公理”. 此处只给出集列(A_n)的直积的形式定义

$$\prod_{n=1}^{\infty} A_n := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) \mid a_n \in A_n, n = 1, 2, \cdots\}.$$

§1.2 集合的势(基数)

1.2.1 映射的概念

设 X 和 Y 是两个非空集合,若在 X 和 Y 之间存在一个对应关系,使得对于 X 中的每个元素 x, 在 Y 中有惟一的元素 y 与之对应,则称给出了一个从 X 到 Y 的映射,而上述 y 称为 x 在该映射下的像. 若用 f 表示此映射,则上述对应关系常表示为

$$f: X \to Y,$$

$$x \mapsto y = f(x),$$

X 称为映射 f 的定义域,记为 $\mathscr{D}(f)$.

若对于任一 $y \in Y$ 存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$,则称 f 是“映上”的或“满射”;若对于 X 中的任何两个元素,当 $x_1 \neq x_2$ 时有 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 是“**1-1**”的或“单射”;若 f 既是“**1-1**”的(单射)又是“映上”的(满射),则称 f 是一一对应(双射);若存在 $y_0 \in Y$ 使得对一切 $x \in X$ 有 $f(x) = y_0$,则称 f 为常值映射;若 $Y = X$, 且对于任一 $x \in X$ 有 $f(x) = x$, 则称 f 为恒等映射,X 上的恒等映射常记作 I_X;若 $Y = \mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),则称 f 为 X 上的实(或复)函数.

若 $f: X \to Y$ 为双射,则对每一个 $y \in Y$,有且仅有一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 定义

$$f^{-1}: Y \to X,$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y),$$

则 f^{-1} 是 Y 到 X 上的双射,称之为 f 的逆映射.

设 $f: X \to Y$, 对于 $A \subset X$ 及 $B \subset Y$,令

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\},$$

$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$$

(规定 $f(\varnothing) = \varnothing$),则称 $f(A)$为 A 在映射 f 下的像,$f^{-1}(B)$为 B 在映射 f 下的原像.

易知,若 $f:X\to Y$ 为双射,则对于 $B\subset Y$, $f^{-1}(B)$既可视作 B 在映射f下的原像,又可视作 B 在映射f^{-1}下的像.

定理 1.2.1 设 $f:X\to Y$, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$和$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$分别是$X$ 和 Y 上的集族,则

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),\quad f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda),\quad f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda).$$

证明留作练习.

在今后的学习中我们将经常用到集合的特征函数:设 $E\subset X$, 定义 χ_E: $X\to\mathbf{R}$

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

称 χ_E 为集合E 的特征函数.

集合的特征函数有如下一些性质:

设 $A,B,E_n(n=1,2,\cdots)$为 X 中的集合,则

(1) $A\neq B\Leftrightarrow\chi_A\neq\chi_B$;

(2) $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\leqslant\chi_B$;

(3) $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$;

(4) $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$;

(5) $\chi_{A\setminus B}=\chi_A[1-\chi_B]$;

(6) $\chi_{\overline{\lim}E_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$;

(7) $\chi_{\underline{\lim}E_n}=\underline{\lim_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$;

(8) (E_n)收敛$\Leftrightarrow(\chi_{E_n})$收敛;且此时成立 $\chi_{\lim E_n}=\lim_{n\to\infty}\chi_{E_n}$.

1.2.2 集合的对等、势

若从集合 A 到集合B 存在着一个一一对应(映射),则称 A 和B 对等,记作 $A\sim B$,与之相反的情形则称 A 和B 不对等.此外,约定$\varnothing\sim\varnothing$.关系"$\sim$"具有以下性质:

(i) 对任何集合 A,成立 $A\sim A$;

(ii) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

(iii) 若 $A\sim B$,且 $B\sim C$,则 $A\sim C$.

除了记法"$A\sim B$"外,我们也用"$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$"表示 A 与B 对等,其中"$\overline{\overline{A}}$"

称为集合 A 的势(或基数). 因此,"两个集合具有相同的基数(或等势)"只是"两个集合对等"的另一种说法.

1.2.3 势的比较

若集合 A 与集合 B 的某一子集对等,则记为 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$;若 A 与 B 不对等,但 A 与 B 的某一子集对等,则记为 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

定理 1.2.2 对任何集合 A,必有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.

证 若 $A = \varnothing$,则 $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing\}$,定理的结论显然成立.

现设 $A \neq \varnothing$. A 显然与 $\mathscr{P}(A)$ 中的那些由 A 的每个元素所成的单点集构成的子集族对等,因而 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$. 下用反证法. 若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$,则存在 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的双射 f. 于是对任一 $a \in A$ 有 $f(a) \in \mathscr{P}(A)$,即 $f(a)$ 是 A 的一个子集. 现令

$$A^* = \{a \mid a \in A,\ a \notin f(a)\},$$

则 $A^* \in \mathscr{P}(A)$. 由于 f 是 A 到 $\mathscr{P}(A)$ 的一一对应,于是存在惟一的 $a^* \in A$ 使得 $f(a^*) = A^*$. 若 $a^* \in A^*$,则由 A^* 的定义应有 $a^* \notin f(a^*)(=A^*)$,矛盾;又若 $a^* \notin A^*$,同样由 A^* 的定义应有 $a^* \in f(a^*)(=A^*)$,矛盾. 因此 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$ 不能成立,从而必有 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$.

引理(Banach) 设 $f: A \to B$, $g: B \to A$,则存在 $M \subset A$ 使得

$$g(f(M)^C) = M^C,$$

其中 $f(M)^C = B \setminus f(M)$, $M^C = A \setminus M$.

证 令

$$\Gamma = \{E \mid E \subset A,\ E \cap g(f(E)^C) = \varnothing\},$$

$$M = \bigcup_{E \in \Gamma} E,$$

则有 $M \in \Gamma$. 事实上,由于

$$E \cap g(f(M)^C) \subset E \cap g(f(E)^C) = \varnothing, \quad E \in \Gamma,$$

所以

$$M \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

即得 $g(f(M)^C) \subset M^C$.

下证 $g(f(M)^C) = M^C$. 用反证法. 若不然,则存在 $a_0 \in A \cap (M \cup g(f(M)^C))^C$. 现令 $M_0 = M \cup \{a_0\}$,则有

$$M \cap g(f(M_0)^C) \subset M \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

$$\{a_0\} \cap g(f(M_0)^C) \subset \{a_0\} \cap g(f(M)^C) = \varnothing,$$

从而有

$$M_0 \cap g(f(M_0)^C) = \varnothing,$$

此即说明 $M_0 \in \Gamma$ 且 M 为 M_0 的真子集,这与 M 的定义矛盾.证毕.

定理 1.2.3 (1) 对任何集合 A,有 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{A}}$;

(2) 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{C}}$,则 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$;

(3) 若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$,则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$(Bernstein 定理).

证 只证(3).由假设,存在单射 $f: A \to B$ 及单射 $g: B \to A$;又由引理,存在 $M \subset A$ 使得 $M^C = g(f(M)^C)$.注意到

$$f: A \to f(A), \quad g: B \to g(B)$$

均为双射,由此令 $\varphi: A \to B$,

$$\varphi(a) = \begin{cases} f(a), & a \in M, \\ g^{-1}(a), & a \in M^C. \end{cases}$$

显然 φ 是 A 到 B 上的双射,即得 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

§1.3 可数集与不可数集

对于集合 A:若 $A = \varnothing$,则规定 $\overline{\overline{A}} = 0$;若存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $A \sim \{1, 2, \cdots, n\}$,则定义 $\overline{\overline{A}} = n$,在这两种情形下,均称 A 为有限集;若 $A \sim \mathbf{N}$;则称 A 为可数集(或可列集),且记 $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$.显然,$A$ 为可数集的充要条件是 A 中的所有元素可排列成 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,其中当 $n \neq m$ 时 $a_n \neq a_m$.

不是有限集的集合称为无限集;不是可数集的无限集称为不可数集.特别地,有限集与可数集统称为至多可数集.

定理 1.3.1 任一无限集必含有可数子集.

证 设 A 为无限集.取 $a_1 \in A$,由于 $A \setminus \{a_1\} \neq \varnothing$,所以可取 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$,又 $A \setminus \{a_1, a_2\} \neq \varnothing$,所以可取 $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2\}$,…,此过程可无限进行下去,于是就得到 A 的一个可数子集 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$.

推论 可数集的任一子集必为至多可数集.

证 设 A^* 为 A 的无限子集,则由 $A^* \subset A$ 知 $\overline{\overline{A^*}} \leqslant \overline{\overline{A}}$,又由定理 1.3.1 知,$\overline{\overline{A^*}} \geqslant \aleph_0 = \overline{\overline{A}}$,于是由 Bernstein 定理即得 $\overline{\overline{A^*}} = \overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

定理 1.3.2 设 $1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph_0$，若 $\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph_0(\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为至多可数集；又若存在 $\lambda\in\Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_\lambda}}=\aleph_0$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为可数集.

证 若 $\overline{\overline{\Lambda}}=1$，则结论显然成立. 现只需证明当 $\Lambda=\mathbf{N}$，$\overline{\overline{A_n}}=\aleph_0(n\in\mathbf{N})$ 且 $A_n\cap A_m=\varnothing(n\neq m)$ 时结论成立. 为此，记

$$A_1=\{a_{11},a_{12},\cdots,a_{1j},\cdots\},$$

$$A_2=\{a_{21},a_{22},\cdots,a_{2j},\cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n=\{a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nj},\cdots\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 中的元素可排列为

$$\{a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},\cdots,a_{ij},\cdots\},$$

其中 a_{11} 排第一，当 $i+j>2$ 时，a_{ij} 排在第 n 位：$n=j+\sum\limits_{k=1}^{i+j-2}k$.

定理1.3.3 若 $1\leqslant\overline{\overline{A_k}}\leqslant\aleph_0(k=1,2,\cdots,n)$，且存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $\overline{\overline{A_i}}=\aleph_0$，则 $\prod\limits_{k=1}^{n}A_k$ 是可数集.

证 只需证明当 $\overline{\overline{A_k}}=\aleph_0(k=1,2,\cdots,n)$ 时结论成立. 现用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时，结论显然成立. 设 $n=m$ 时结论成立，现取定 $a_i^{(m+1)}\in A_{m+1}$，记

$$B_i=\left(\prod_{k=1}^{m}A_k\right)\times\{a_i^{(m+1)}\}(i=1,2,\cdots),$$

则 $B_i\sim\prod\limits_{k=1}^{m}A_k$，由假定 B_i 为可数集，而 $\prod\limits_{k=1}^{m+1}A_k=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B_i$，故由定理 1.3.2 即得所证.

例 1 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

证 只需证明正有理数集 $\mathbf{Q}_+$ 为可数集. 一方面，$\mathbf{Q}_+$ 显然为无限集；另一方面，可将 $\mathbf{Q}_+$ 视作 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 的子集，由此即知 $\mathbf{Q}_+$ 为可数集.

例 2 实数集 $\mathbf{R}$ 是一不可数集.

证 只需证明闭区间 $[a,b](a<b)$ 为不可数集，下用闭区间套定理结

合反证法说明之.若$[a, b]$为可数集,则可将其表为$\{x_n\}$.现将$[a, b]$三等分,记其分点为c, d,则在$[a, c]$与$[d, b]$中至少有一个区间不含有x_1,将此区间记为$[a_1, b_1]$;对$[a_1, b_1]$重复上述对$[a, b]$的讨论,可得不含有$\{x_1, x_2\}$的子区间$[a_2, b_2]$;如此以往,我们得到一闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$满足:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \subset [a, b] (n = 1, 2, \cdots)$;

(2) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{3^n} (n = 1, 2, \cdots)$;

(3) $[a_n, b_n]$中不含有$\{x_1, \cdots, x_n\} (n = 1, 2, \cdots)$.

由闭区间套定理,$[a, b]$中存在(惟一)$\xi \in [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$.由假定$[a, b] = \{x_n\}$,因此必存在$k \in \mathbf{N}$使得$\xi = x_k$,而由上述(3)知$x_k \notin [a_n, b_n] (n \geqslant k)$.由此得到矛盾.证毕.

以后,记$\mathbf{R}$的势为$\aleph$,并称$\aleph$为连续统势.于是由势的比较的定义,可知$\aleph > \aleph_0$.易知,$\mathbf{R}$上的任意非退化区间与$\mathbf{R}$对等,从而也具有连续统势$\aleph$.

定理 1.3.4 若$2 \leqslant \overline{\overline{A_n}} \leqslant \aleph (n = 1, 2, \cdots)$,则$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势为$\aleph$.

证 易知,我们只需证明:当$\overline{\overline{A_n}} = 2 (n = 1, 2, \cdots)$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\geqslant \aleph$;而当$\overline{\overline{A_n}} = \aleph (n = 1, 2, \cdots)$时$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\leqslant \aleph$.

若$\overline{\overline{A_n}} = 2$,则$A_n \sim \{0, 1\} (n = 1, 2, \cdots)$,$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \{(\delta_n) \mid \delta_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, \cdots\} = A$.注意到$A$中的那些具有无穷多个1的元素(数列)全体与二进制无穷小数全体(即$(0,1]$)一一对应,于是$\overline{\overline{A}} \geqslant \aleph$,从而$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$的势$\geqslant \aleph$.

若$\overline{\overline{A_n}} = \aleph$,则$A_n \sim (0,1] (n = 1, 2, \cdots)$,$\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \{(\alpha_n) \mid \alpha_n \in (0, 1], n = 1, 2, \cdots\} = B$.将每个$\alpha_n$用二进制无穷小数表示:

$$\alpha_n = 0.\alpha_{n1}\alpha_{n2}\cdots\alpha_{nk}\cdots,\ \alpha_{nk} \in \{0, 1\} (k = 1, 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots),$$

任取$\alpha = (\alpha_n) \in B$,令

$$f(\alpha) = 0.\delta_1\delta_2\cdots\delta_n\cdots,$$

其中$\delta_1 = \alpha_{11}$,$\delta_n = \alpha_{ij}\left(n = j + \sum\limits_{k=1}^{i+j-2} k,\ i + j > 2\right)$,$n \geqslant 2$(参见定理1.3.2

的证明). 显然, f 为B 到$(0,1]$ 中的单射, 于是$\overline{\overline{B}}\leqslant\aleph$, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty}A_n$ 的势$\leqslant\aleph$.

推论 1 若$1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph_0$, $1\leqslant\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph(\lambda\in\Lambda)$, 且存在$\lambda_0\in\Lambda$ 使得$\overline{\overline{A_{\lambda_0}}}=\aleph$, 则$\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的势为$\aleph$.

推论 2 若$1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph$, $\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph(\lambda\in\Lambda)$, 且存在$\lambda_0\in\Lambda$ 使得$\overline{\overline{A_{\lambda_0}}}=\aleph$, 则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的势为$\aleph$.

上述两个推论的证明留作练习.

§1.4 Zorn 引理

以下简单介绍一下作为公理的 Zorn 引理,它与 Zermelo 选取公理等价,在本书的泛函分析部分,将有所应用.

Zorn 引理 若偏序集 $M(\neq\varnothing)$ 的任一全序子集均有上界,则 M 存在极大元.

注 Zorn 引理中有关术语的定义.

1° 设有集合 M,其上定义了一个二元关系"$\prec$"(偏序),满足:

(i) $a\prec a$;

(ii) 若 $a\prec b$ 且 $b\prec a$,则 $a=b$;

(iii) 若 $a\prec b$, $b\prec c$, 则 $a\prec c$;

则称$(M,\prec)$ 为偏序集.(一般就称 M 为偏序集.)

2° 如果偏序集中的任意元素 a 和b,关系"$a\prec b$"与"$b\prec a$"中至少有一个成立,那么就称该集为全序集.

3° 设 W 为偏序集M 的子集,如果 $u\in M$ 满足:若 $x\in W$ 则$x\prec u$,那么就称 u 为W 的一个上界.

4° 设 M 为一偏序集,如果 $m\in M$ 满足:若 $m\prec x$ 则$x=m$,那么就称 m 为M 的一个极大元.

例 设有集合 X,令 $M=\mathscr{P}(X)$,则集合的包含关系"$\subset$"便可作为$\mathscr{P}(X)$ 上的一个偏序关系.

习 题

1. 证明: $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$; $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^C$.

2. 证明: $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \gamma\in\Gamma}}(A_\lambda\cap B_\gamma)$;

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcap_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \gamma\in\Gamma}}(A_\lambda\cup B_\gamma).$$

3. 证明：$(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)^C = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n^C$；$(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n)^C = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n^C$.

4. 设$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$存在，证明：

$$\lim_{n\to\infty} A_n \setminus E = \lim_{n\to\infty}(A_n \setminus E);\quad E\setminus \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}(E\setminus A_n);$$

$$E\cup \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}(E\cup A_n);\quad E\cap \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}(E\cap A_n).$$

5. 设(A_n)为一集列，令$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k (n = 1, 2, \cdots)$，证明：集列$(B_n)$中的元素两两不交，且成立

$$\bigcup_{n=1}^{m} B_n = \bigcup_{n=1}^{m} A_n (m = 1, 2, \cdots),\quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

6. 设(A_n)为一集列，证明：

(1) $x\in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$的充要条件是有无穷多个$A_n$含有$x$；

(2) $x\in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$的充要条件是存在$n_x\in \mathbf{N}$当$n\geqslant n_x$时恒有$x\in A_n$.

7. 设(A_n)为一集列，证明：

(1) 若$A_n\uparrow$，则(A_n)收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$；

(2) 若$A_n\downarrow$，则(A_n)收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

8. 证明：

(1) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\times B_\lambda) = (\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)\times(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)$；

(2) $(A_1\times B_1)\setminus(A_2\times B_2) = ((A_1\cap A_2)\times(B_1\setminus B_2))\cup((A_1\setminus A_2)\times B_1)$.

9. 设$A, B, E_n (n = 1, 2, \cdots)$为$X$中的集合，证明：

(1) $A\subset B\Leftrightarrow \chi_A\leqslant \chi_B$；

(2) $\chi_{A\cap B} = \chi_A\cdot\chi_B$；

(3) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$；

(4) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A[1-\chi_B]$；

(5) $\chi_{\overline{\lim} E_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$；

(6) $\chi_{\underline{\lim} E_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\chi_{E_n}$；

(7) (E_n)收敛$\Leftrightarrow(\chi_{E_n})$收敛；且此时成立$\chi_{\lim E_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\chi_{E_n}$.

10. 设$f: X\to Y$，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$和$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$分别是$X$和$Y$上的集族，证明：

(1) $f(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$；

(2) $f(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)\subset\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$；

(3) $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$；

(4) $f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$.

11. 设$f: X\to Y$，证明：

(1) 对于任一$A\subset X$，有$A\subset f^{-1}(f(A))$；且当f为单射时"$\subset$"成为"$=$"；

(2) 若$E\subset Y$，则$f(f^{-1}(E)) = E\cap f(X)$，$f^{-1}(E^C) = (f^{-1}(E))^C$；

(3) f 为单射 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $A,B\subset X$ 有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$;

(4) f 为双射 $\Leftrightarrow$ 对于任意的 $A\subset X$ 有 $f(A^C)=(f(A))^C$.

12. 设集 A 中的元素为 $\mathbf{R}$ 上互不相交的开区间,证明:A 为至多可数集.

13. 证明代数数全体组成一可数集.

14. 设 A 是平面 $\mathbf{R}^2$ 上以有理点(即坐标都是有理数)为中心、有理数为半径的圆的全体所成之集,证明:A 是可数集.

15. 证明:$\mathbf{R}$ 上的单调函数的不连续点全体为至多可数集.

16. 证明:$\mathbf{R}$ 与其任一非退化区间对等.

17. 设 A 是一个无穷集合,证明:存在 $B\subset A$,使得 $B\sim A$,且 $A\setminus B$ 为可数集.

18. 证明:$[0,1]$ 上的全体无理数所成之集其势为 $\aleph$.

19. 设 A 为可数集,证明:A 的所有有限子集所成之集族的势为 $\aleph_0$;A 的所有无穷子集所成之集族的势为 $\aleph$.

20. 设 $1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph_0$,$1\leqslant\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph(\lambda\in\Lambda)$,且存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_{\lambda_0}}}=\aleph$,证明:$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的势为 $\aleph$.

21. 设 $1\leqslant\overline{\overline{\Lambda}}\leqslant\aleph$,$\overline{\overline{A_\lambda}}\leqslant\aleph(\lambda\in\Lambda)$,且存在 $\lambda_0\in\Lambda$ 使得 $\overline{\overline{A_{\lambda_0}}}=\aleph$,证明:$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 的势为 $\aleph$.

22. 证明:闭区间上的所有连续函数所成之集的势为 $\aleph$.

23. 证明:闭区间上的所有单调函数所成之集的势为 $\aleph$.

24. 证明:若 $A\cup B$ 的势为 $\aleph$,则 A 与 B 中必有一个集的势为 $\aleph$.

25. 证明:若 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的势为 $\aleph$,则 (A_n) 中必有一个集的势为 $\aleph$.

第二章　点集拓扑

§2.1　n 维欧氏空间、度量空间、拓扑空间的概念

定义 2.1.1　设 $x, y\in \mathbf{R}^n$,其中 $x=(\xi_1, \xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$,定义

$$d:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},$$

$$(x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2}.$$

函数 d 被称为 $\mathbf{R}^n$ 上的欧氏距离,当 $\mathbf{R}^n$ 被赋予欧氏距离后,便称为 n 维欧氏空间,记为$(\mathbf{R}^n, d)$,在不至于引起混淆的情形下,简记为 $\mathbf{R}^n$.

易证 d 满足:

1° $d(x, y)\geqslant 0$, 且 $d(x, y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

2° $d(x, y)=d(y, x)$, $x, y\in \mathbf{R}^n$;

3° $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$, $x, y, z\in \mathbf{R}^n$.

定义 2.1.2　设 X 为一集合,函数 d: $X\times X\to \mathbf{R}$ 满足:

1° $d(x, y)\geqslant 0$, 且 $d(x, y)=0$ 的充要条件是 $x=y$;

2° $d(x, y)=d(y, x)$, $x, y\in X$;

3° $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$, $x, y, z\in X$,

则称 d 为X 上的一个距离,(X, d)称为度量空间(或距离空间),在不至于引起混淆的情形下,也称 X 为一度量空间.

设 $x\in X$,$r>0$,记

$$B(x; r):=\{y \mid y\in X, d(y, x)<r\},$$

$$S(x; r):=\{y \mid y\in X, d(y, x)\leqslant r\},$$

分别称 $B(x; r)$与 $S(x; r)$是 X 中的以x 为中心r 为半径的开球与闭球.

设 $A\subset X$,若对于任一 $x\in A$ 均存在$r>0$ 使得 $B(x; r)\subset A$,则称 A 为(X 中的)开集.易证,开球是开集.

记 X 中开集全体所成之集族为τ,则由度量空间中开集的定义易知下述定理成立.

定理 2.1.1　(i) $X, \varnothing\in \tau$;

(ii) 若 $G_1, G_2 \in \tau$,则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$;

(iii) 若 $G_\lambda \in \tau(\lambda \in \Lambda)$,则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$.

例 1 离散度量空间

设 X 为一非空集合,定义

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases} \quad x, y \in X,$$

则称(X, d)为离散度量空间.

例 2 有界函数空间 $B(X)$

设 X 为一非空集合,$B(X)$表示 X 上的有界实(或复)值函数全体所成之集,定义

$$d(x, y) = \sup_{t \in X} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in B(X),$$

则称$(B(X), d)$为有界函数空间.

特别地,若 $X = \mathbf{N}$,则记 $B(X)$为 l^∞,$x = (\xi_n)$,$y = (\eta_n)$,$d(x, y) = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\xi_n - \eta_n|$.

定义 2.1.3 设 τ 是集合 X 的某些子集所成之集族,满足

(i) $X, \varnothing \in \tau$;

(ii) 若 $G_1, G_2 \in \tau$,则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$;

(iii) 若 $G_\lambda \in \tau(\lambda \in \Lambda)$,则 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \tau$,

则称 τ 为 X 上的一个拓扑,τ 中的元素称为开集,并称(X, τ)为拓扑空间,在不至于引起混淆的情形下,也称 X 为一拓扑空间.

在度量空间中,由距离 d 导出的 τ 称为距离拓扑,在此意义下,我们将度量空间视为一拓扑空间. 特别地,在一维欧氏空间 $\mathbf{R}$ 上由欧氏距离导出的拓扑一般称之为 $\mathbf{R}$ 上的通常拓扑,以后若无特别说明,$\mathbf{R}$ 就表示具有通常拓扑的实数空间.

设 A 为拓扑空间(X, τ)中的集合,记

$$\tau_A := \{G \cap A \mid G \in \tau\},$$

则集族 τ_A 是 A 上的一个拓扑,称之为 A 上的相对拓扑,(A, τ_A)称为(X, τ)的子空间. 由此即知,A 的子集 H 是 τ_A 开集(即相对于 A 的开集)的充要条件是存在 X 上的 τ 开集 G 使得 $H = G \cap A$.

§2.2 拓扑空间中的若干基本概念

在以下所述的概念中,除了特别指出 X 为度量空间外,其他的均假定 X

为拓扑空间，A 为 X 中的集合.

(1) 若 A^C 为开集，则称 A 为闭集.

(2) 包含 A 的一切闭集之交称为 A 的闭包，记为 A^-.

(3) 设 $x\in X$，若存在开集 $G\subset A$ 使得 $x\in G$，则称 A 为 x 的一个邻域，与此相对地称 x 为 A 的一个内点. A 的内点全体称为 A 的核，记为 A°.

(4) 若 $x\in(A^C)^\circ$，则称 x 为 A 的外点；若 $x\in(A^\circ\cup(A^C)^\circ)^C$，则称 x 为 A 的边界点. A 的边界点全体称为 A 的边界，记为 ∂A.

易知 $\partial A=\partial(A^C)$，此外，$A^\circ,\partial A,(A^C)^\circ$ 互不相交且

$$X = A^\circ \cup \partial A \cup (A^C)^\circ.$$

(5) 设 $x\in X$，若对于任一包含 x 的开集 G 均有 $(G\setminus\{x\})\cap A\neq\varnothing$，则称 x 为 A 的聚点. A 的聚点全体称为 A 的导集，记为 A'.

(6) 若 $x\in A\setminus A'$，则称 x 为 A 的孤立点.

(7) 若 $A=A'$，则称 A 为完全集或完备集.

(8) 若 $(A^-)^\circ=\varnothing$，则称 A 为无处稠密集或疏朗集.

(9) 若 $A^-=X$，则称 A 为 X 的稠密子集，并说 A 在 X 中稠(密). 一般地，设 $B\subset X$，若 $A^-\supset B$，则称 A 在 B 中稠密(注意，此处并不要求 $A\subset B$).

易证，若 X 为度量空间，则

$$A^-\supset B \Leftrightarrow \text{对于任一 } \varepsilon>0, \text{有 } \bigcup_{y\in A}B(y;\varepsilon)\supset B.$$

(10) 若存在闭集序列 (F_n) 使得 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，则称 A 为 F_σ- 型集；若存在开集序列 (G_n) 使得 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则称 A 为 G_δ- 型集.

(11) 若 A 有一个在 A 中稠密的至多可数子集，则称 A 是可分的；若 X 是可分的，则称 X 为可分空间.

(12) 若存在无处稠密集列 (E_n)，使得 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则称 A 为第一类型集(第一纲集)；凡不是第一类型的集合均称为第二类型集(第二纲集).

(13) 在度量空间 X 中，若存在点 x_0 及常数 $r>0$ 使得 $B(x_0;r)\supset A$，则称 A 为有界集. 若对于任一 $\varepsilon>0$，存在 X 中有限个以 ε 为半径的开球 $B_k(k=1,\cdots,n)$ 使得 $\bigcup_{k=1}^{n}B_k\supset A$，则称 A 为完全有界集.

易知，A 为有界集的充要条件是集 A 的直径 $d(A):=\sup_{x,y\in A}d(x,y)<+\infty$.

请读者自行证明：若 A 为完全有界集，则对于任一 $\varepsilon>0$，存在有限个以 A 中的点为中心、ε 为半径的开球之并包含 A.

(14) 设(x_n)是度量空间 X 中的点列,若存在 $x\in X$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n, x)=0$,则称$(x_n)$收敛于 x, (x_n)称为收敛点列,x 称为(x_n)的极限,且记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n = x \quad 或 \quad x_n\to x(n\to\infty).$$

易证,度量空间中收敛点列的极限是惟一的;d 是两个变元的连续函数,即若 $x_n\to x$, $y_n\to y$, 则 $d(x_n, y_n)\to d(x, y)$.

(15) 设 A 为度量空间X 中的集合,若 A 中任一点列都存在收敛(于 X 中点的)子列,则称 A 为列紧集.

(16) 设$\mathscr{G}$为某一开集族,若$\bigcup\limits_{G\in\mathscr{G}}G\supset A$,则称开集族$\mathscr{G}$覆盖了 A,并称$\mathscr{G}$为 A 的一个开覆盖.若 A 的任一开覆盖中均存在可覆盖A 的有限子族,则称 A 为紧集.若 X 自身是紧的,则称 X 为紧空间.

(17) 设(x_n)为度量空间 X 中的点列,若对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $m, n>N$ 时,恒有 $d(x_m, x_n)<\varepsilon$,则称(x_n)为 Cauchy 点列(或基本点列).若度量空间 X 中的任一 Cauchy 点列均为收敛点列,则称 X 为完备度量空间.

在以下定理的叙述中,若无特别的说明,则 X 表示拓扑空间,其他的大写字母均表示 X 中的集合,不再一一指出.

由闭集的定义,利用 De Morgan 公式即知下述定理 2.2.1 成立.

定理 2.2.1 (1) $X,\varnothing$是闭集;

(2) 若 F_1, F_2 是闭集,则 $F_1\cup F_2$ 是闭集;

(3) 若 F_λ 是闭集($\lambda\in\Lambda$),则$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$ 是闭集.

由定义易证下述引理成立.

引理 若 $A\subset B$,则 $A'\subset B'$,$A^\circ\subset B^\circ$,$A^-\subset B^-$.

定理 2.2.2 (1) A°是 A 的最大开子集;A 为开集$\Leftrightarrow A=A^\circ$;

(2) A^-是包含 A 的最小闭集;A 为闭集$\Leftrightarrow A=A^-$;

(3) A 为闭集$\Leftrightarrow A\supset A'$;

(4) $A^-=A\cup A'$;

(5) $A^-=A^\circ\cup\partial A$;

(6) A 为度量空间X 中的闭集$\Leftrightarrow$$A$ 中的任一收敛点列的极限为A 中的点;

(7) A 为度量空间X 中的闭集$\Leftrightarrow$若 $d(x, A)=0$, 则 $x\in A$,其中

$$d(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y\in A\}.$$

证 (1) 记$\{G_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$为 A 的全体开子集所成之集族,则

$$x \in A^{\circ} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Lambda : x \in G_{\lambda} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_{\lambda},$$

于是 $A^{\circ} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_{\lambda}$，显然，$A^{\circ}$作为开集之并为开集，且是 A 的最大开子集；由此即知，A 为开集$\Leftrightarrow A = A^{\circ}$.

(2) 记$\{F_{\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$为全体包含 A 的闭集所成之集族，则由定义知 $A^{-} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_{\lambda}$，显然，$A^{-}$ 作为闭集之交为闭集，且是包含 A 的最小闭集；由此即知，A 为闭集$\Leftrightarrow A = A^{-}$.

(3) 设 A 为闭集，则由定义 A^{C} 为开集，同时注意到 $A^{C} \cap A = \varnothing$，于是由聚点的定义可知，$x \in A^{C} \Rightarrow x \in (A')^{C}$，即 $A^{C} \subset (A')^{C}$，亦即 $A' \subset A$. 反之设 $A' \subset A$，则 $x \in A^{C} \Rightarrow x \in (A')^{C}$，由定义，存在含有 x 的某一开集 G 满足 $(G \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$，由于 $x \in A^{C}$，因此 $G \cap A = \varnothing$，即有 $G \subset A^{C}$，此即说明 $x \in (A^{C})^{\circ}$，从而A^{C} 为开集，即 A 为闭集.

(4) 由上述(2)、(3)以及引理可得：$A \subset A^{-}$，$A' \subset (A^{-})' \subset A^{-}$，于是有 $A' \cup A \subset A^{-}$. 注意到，为证 $A' \cup A \supset A^{-}$ 成立，只需证明 $A' \cup A$ 为闭集，即证明$(A' \cup A)^{C} = (A')^{C} \cap A^{C}$ 为开集. 由上述(3)中的证明可知，$x \in (A')^{C} \cap A^{C} \Rightarrow$存在含有 x 的开集G 满足$G \subset A^{C}$，而此开集 G 中的点显然不可能是A 的聚点，即 $G \subset (A')^{C}$，于是有 $G \subset (A')^{C} \cap A^{C}$，此即说明 $x \in ((A' \cup A)^{C})^{\circ}$，从而证得$(A' \cup A)^{C}$ 为开集.

(5) 注意到$(A^{\circ} \cup \partial A)^{C} = (A^{C})^{\circ}$，因此只需证明$(A^{-})^{C} = (A^{C})^{\circ}$. 因为 A^{-}为包含 A 的闭集，所以$(A^{-})^{C}$ 为含于A^{C} 的开集，由(1)得$(A^{-})^{C} \subset (A^{C})^{\circ}$. 另一方面，$(A^{C})^{\circ} \cap (A \cup A') = \varnothing$显然成立，由(4)即得$(A^{C})^{\circ} \cap A^{-} = \varnothing$，于是$(A^{C})^{\circ} \subset (A^{-})^{C}$. 由此证得$(A^{-})^{C} = (A^{C})^{\circ}$.

(6) 设(x_n)为 A 中的任一收敛点列，记 $x_n \to x$. 若(x_n)中有无穷多项两两不同，则 $x \in A'$；否则必有 $x \in A$. 无论哪种情形，均有 $x \in A^{-}$. 于是由(2)即得所证.

(7) 由 $d(x, A)$的定义以及(6)即可证得.

定理 2.2.3 $A^{-} = X$ 的充要条件是对于任一非空开集 G 均有 $A \cap G \neq \varnothing$.

证 设$A^{-} = X$. 若开集 G 满足$A \cap G = \varnothing$，则闭集 G^{C} 满足$A \subset G^{C}$，由定理 2.2.2(2)得 $A^{-} \subset G^{C}$，于是$\varnothing = X^{C} = (A^{-})^{C} \supset G$，即得 $G = \varnothing$. 反之，由于$(A^{-})^{C} \cap A = \varnothing$且$(A^{-})^{C}$ 为开集，由条件知$(A^{-})^{C} = \varnothing$，即得 $A^{-} = X$.

定理 2.2.4 （无处稠密集的三种等价描述） (1) $(A^{-})^{\circ} = \varnothing$；

(2) 对于任一非空开集 G，有 $G \cap (A^{-})^{C} \neq \varnothing$；

(3) 对于任一非空开集 G 必含有非空开子集G_0 满足 $A \cap G_0 = \varnothing$.

证 (1)$\Rightarrow$(2). 若开集 G 满足$G \cap (A^{-})^{C} = \varnothing$，则 $G \subset A^{-}$，于是 $G \subset (A^{-})^{\circ} = \varnothing$，即 $G = \varnothing$. 此即说明(2)成立.

(2)⇒(3).对于任一非空开集 G,令 $G_0=G\cap(A^-)^C$, 则由条件知 G_0 为 G 的非空开子集,此时

$$A\cap G_0=A\cap G\cap(A^-)^C=\varnothing.$$

(3)⇒(1).用反证法.若$(A^-)^\circ\neq\varnothing$,则由条件知,存在$(A^-)^\circ$的非空开子集 G_0 满足 $A\cap G_0=\varnothing$,而此时必有 $A'\cap G_0=\varnothing$,从而 $A^-\cap G_0=\varnothing$, 进而 $G_0=(A^-)^\circ\cap G_0=\varnothing$,由此得到矛盾.

定理 2.2.5　完全有界集是有界的可分集.

证　设 A 为X 中完全有界集,则存在 X 中有限个以 1 为半径的开球 $B_k=B(x_k;1)(k=1,\cdots,n)$ 使得 $\bigcup_{k=1}^{n}B_k\supset A$. 取定 $x_0\in X$,记 $r=1+\sum_{k=1}^{n}d(x_k,x_0)$. 对于任一 $x\in A$ 存在B_k 使得$x\in B_k$, 即 $d(x,x_k)<1$, 进而

$$d(x,x_0)\leqslant d(x,x_k)+d(x_k,x_0)<r,$$

于是 $A\subset B(x_0;r)$, 即 A 为有界集.

其次,对于任一 $k\in\mathbf{N}$,总存在有限个以 A 中的点 $x_j^{(k)}$ 为中心、$\frac{1}{k}$为半径的开球 $B\left(x_j^{(k)};\frac{1}{k}\right)(j=1,2,\cdots,n_k)$使得$\bigcup_{j=1}^{n_k}B\left(x_j^{(k)};\frac{1}{k}\right)\supset A$(参见习题 2.12).令

$$D=\{x_j^{(k)}\mid j=1,2,\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\},$$

则 D 为A 中至多可数子集.对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $k\in\mathbf{N}$ 使得$\frac{1}{k}<\varepsilon$,于是

$$\bigcup_{x\in D}B(x;\varepsilon)\supset\bigcup_{j=1}^{n_k}B(x_j^{(k)};\varepsilon)\supset\bigcup_{j=1}^{n_k}B\left(x_j^{(k)};\frac{1}{k}\right)\supset A,$$

此即说明 $\overline{D}\supset A$(参见习题 2.9),从而 A 为可分集.

定理 2.2.6　列紧集是完全有界集.

证明留作练习.

定理 2.2.7　在度量空间中,A 为紧集的充要条件是A 中的任一点列均有收敛于A 中点的子列.

证　必要性.用反证法.若存在 A 中的点列(x_n),其中无收敛于 A 中点的子列,则

$$\forall y\in A\ \exists\,\delta_y>0\ \exists\,N_y\in\mathbf{N}\ \forall n>N_y: x_n\notin B(y;\delta_y).$$

由于 $\mathscr{G}=\{B(y;\ \delta_y)\mid y\in A\}$ 为紧集 A 的一个开覆盖,因此存在 $B(y_k;\ \delta_{y_k})\in\mathscr{G}(k=1,\ \cdots,\ m)$ 使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{m}B(y_k;\ \delta_{y_k})\supset A$. 另一方面,令 $N=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{N_{y_k}\}$,则由 $B(y_k;\ \delta_{y_k})$ 的构造可知,当 $n>N$ 时必有 $x_n\notin\bigcup\limits_{k=1}^{m}B(y_k;\ \delta_{y_k})$,这与 (x_n) 为 A 中的点列矛盾.

充分性. 充分性条件说明 A 必为列紧(闭)集,而由定理 2.2.6 知 A 为完全有界集. 由此可知,我们只需证明,对于 A 的任一开覆盖 $\mathscr{G}$,

$$\exists\,\delta>0\,\forall\,x\in A\,\exists\,G_x\in\mathscr{G}:B(x;\ \delta)\subset G_x.$$

用反证法. 如若不然,即存在 A 的某一开覆盖 $\mathscr{G}$,使得

$$\forall\,n\in\mathbf{N}\,\exists\,x_n\in A\,\forall\,G\in\mathscr{G}:B\left(x_n;\ \frac{1}{n}\right)\cap G^C\neq\varnothing.$$

由条件,对此 A 中的点列 (x_n),存在子列 (x_{n_k}) 满足 $x_{n_k}\to x_0\in A$. 因为 $\mathscr{G}$ 为 A 的开覆盖,所以存在开集 $G_0\in\mathscr{G}$ 使得 $x_0\in G_0$,进而存在 $r_0>0$ 使得 $B(x_0;\ r_0)\subset G_0$. 另一方面,注意到当 k 充分大时必有 $B\left(x_{n_k};\ \dfrac{1}{n_k}\right)\subset B(x_0;\ r_0)\subset G_0$,这与假设矛盾.

定理 2.2.8 设 X 为一度量空间,则下述三命题等价:

(1) X 是完备度量空间;

(2) (Cantor)若 (F_n) 为 X 中的非空闭集序列,满足

$$F_{n+1}\subset F_n(n=1,\ 2,\ \cdots),\ \lim_{n\to\infty}d(F_n)=0,$$

则存在惟一一点 $x_0\in F_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$;

(3) X 中的完全有界集是列紧集.

证 (1)⇒(2). 因为 $F_n\neq\varnothing$ 且 $F_{n+1}\subset F_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$,故可取 $x_n\in F_n$,且当 $m\geqslant n$ 时,必有 $x_m\in F_n$,于是

$$d(x_{n+p},\ x_n)\leqslant d(F_n),\ n,\ p\in\mathbf{N},$$

再由 $d(F_n)\to 0$ 即知所得的 (x_n) 为完备度量空间 X 中的 Cauchy 点列,从而为 X 中的收敛点列,记 $x_n\to x_0$. 再次利用"$x_m\in F_n(m\geqslant n)$"及 F_n 为闭集的条件,由定理 2.2.2(6)可知 $x_0\in F_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 若存在 $y_0\in F_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$,则由

$$d(x_0,\ y_0)\leqslant d(F_n)\to 0$$

即知 $d(x_0, y_0)=0$，即 $y_0=x_0$.

(2)⇒(3). 设 A 为度量空间 X 中的完全有界集，(x_n) 为 A 中的点列. 由完全有界集的定义知，对于任一 $k\in\mathbf{N}$，存在有限个以 $\frac{1}{2k}$ 为半径的开球（从而相应的闭球）所成之集族 $\mathscr{F}_k=\{S_m^{(k)}\mid m=1, 2, \cdots, n_k\}$ 覆盖了 A，于是，存在 $S^{(1)}\in\mathscr{F}_1$ 含有 (x_n) 中的无穷多项；又存在 $S^{(2)}\in\mathscr{F}_2$ 使得 $S^{(1)}\cap S^{(2)}$ 含有 (x_n) 中的无穷多项；……；一般地，对于任一 $k\in\mathbf{N}$，存在 $S^{(k)}\in\mathscr{F}_k$ 使得闭集 $F_k\bigcap_{j=1}^{k}S^{(j)}$ 含有 (x_n) 中的无穷多项，由此可知，必存在 (x_n) 的子列 (x_{n_k}) 满足 $x_{n_k}\in F_k(k=1, 2, \cdots)$. 注意到所得的非空闭集序列 (F_k) 满足：$F_{k+1}\subset F_k$ 且 $d(F_k)\leqslant\frac{1}{k}(k-1, 2, \cdots)$，由(2)，存在 $x_0\in F_k(k=1, 2,\cdots)$，且 $d(x_{n_k}, x_0)\leqslant d(F_k)\to 0$，即 $x_{n_k}\to x_0$，从而证得 A 为列紧集.

(3)⇒(1). 设 (x_n) 为度量空间 X 中的 Cauchy 点列，记 A 为由 (x_n) 中的全体项所成之集. 由 Cauchy 点列的定义：

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbf{N}\,\forall n\geqslant N: d(x_n, x_N)<\varepsilon,$$

可知 $\bigcup_{k=1}^{N}B(x_k;\varepsilon)\supset A$，于是 A 为完全有界集. 由(3)，A 为列紧集，此即说明 Cauchy 点列 (x_n) 有收敛子列，由此可知 (x_n) 必为收敛点列（详细论证与数学分析中的有关证明雷同），从而证得 X 的完备性.

定理 2.2.9 完备度量空间 X 的子空间 M 为完备子空间的充要条件是 M 为 X 的闭子空间.

证明留作练习.

定理 2.2.10(Baire 纲定理) 若 X 为完备度量空间，则 X 为第二类型集.

证 用反证法. 若 X 为第一类型集，则存在无处稠密集列 (E_n) 使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 注意到 X 为度量空间，由定理 2.2.4(3)可知：

对于 E_1，存在直径小于 1 的非空闭球 S_1 使得 $S_1\cap E_1=\varnothing$；

对于 E_2，存在直径小于 $\frac{1}{2}$ 的非空闭球 $S_2\subset S_1^{\circ}\subset S_1$，使得 $S_2\cap E_2=\varnothing$；

如此以往，一般地，对于 E_{n+1}，存在闭球 S_{n+1}，满足

$$\varnothing\neq S_{n+1}\subset S_n^{\circ}\subset S_n,\ d(S_{n+1})<\frac{1}{n+1},$$

$$S_{n+1}\cap E_{n+1}=\varnothing\quad(n=1, 2, \cdots).$$

由此得到一满足上述条件的非空闭球套(S_n). 由于 X 为完备度量空间,因此由定理 2.2.8,应在 X 中存在$x_0 \in S_n (n=1, 2, \cdots)$;而由 $S_n \cap E_n = \varnothing (n=1, 2, \cdots)$可知,$x_0 \in (E_n)^C (n=1, 2, \cdots)$,即 $x_0 \in (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^C$, 这与 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 的假定矛盾. 由此即证明了定理.

定理 2.2.11(完备化) 设(X, d)为一度量空间,则存在从 X 到某一完备度量空间的等距嵌入,即存在一完备度量空间(Y, ρ),存在映射 $h: X \to Y$ 满足

$$\rho(h(a), h(b)) = d(a, b), \ a, b \in X.$$

Y 的闭子空间$h(X)^-$是一完备度量空间,称之为 X 的一个完备化空间. X 的完备化在等距的意义下是惟一的.

证 我们只证明完备化空间的存在性,即完备度量空间(Y, ρ)以及等距嵌入映射 $h: X \to Y$ 的存在性.

取 $Y = B(X)$, ρ 为通常的上确界距离,则$(B(X), \rho)$为完备度量空间(参见习题 2.38). 现取定 $x_0 \in X$, 对于任一 $a \in X$,定义函数 h_a: $X \to \mathbf{R}$,

$$h_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0), \ x \in X.$$

由距离的三角不等式知

$$|h_a(x)| \leqslant d(a, x_0), \ x \in X,$$

即 $h_a \in B(X)$. 若令 $h(a) = h_a$, 由此便确定了映射 h: $X \to B(X)$,且有

$$\begin{aligned} \rho(h(a), h(b)) &= \sup_{x \in X} |h_a(x) - h_b(x)| \\ &= \sup_{x \in X} |d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b), \ a, b \in X. \end{aligned}$$

§2.3 连续映射

定义 2.3.1 设(X, d_1)和(Y, d_2)为两个度量空间,f: $X \to Y$, $x_0 \in X$. 若

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0; \delta): f(x) \in B(f(x_0); \varepsilon),$$

则称映射 f 在x_0 处连续. 若 f 在X 的每一点处连续,则称 f 是X 到Y 的连续映射.

注意到上述条件中的"$\forall x \in B(x_0; \delta): f(x) \in B(f(x_0); \varepsilon)$"也可写为"$f(B(x_0; \delta)) \subset B(f(x_0); \varepsilon)$"或"$B(x_0; \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0); \varepsilon))$",同时注

意到度量空间中的开集以及一点的邻域的特性，于是我们可以叙述为：若"对于任一含有 $f(x_0)$ 的开集 V，均存在含有 x_0 的开集 U，使得 $f(U)\subset V$（即 $U\subset f^{-1}(V)$）"或"对于 $f(x_0)$ 的任一邻域 V，$f^{-1}(V)$ 均为 x_0 的邻域"，则称 f 在 x_0 处连续. 而后面的这种叙述，可以推广为拓扑空间 X 到 Y 的映射 f 在 x_0 处连续的定义.

定理 2.3.1 f 为拓扑空间 X 到 Y 的连续映射的充要条件是对于 Y 中的任一开集 V，$f^{-1}(V)$ 为 X 中的开集.

证 必要性. 任取 $x\in f^{-1}(V)$，则 $f(x)\in V$，由于 V 为开集，因此 V 必是 $f(x)$ 的邻域，从而由 f 在 x 点连续的定义可知 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域，也就是说 x 是 $f^{-1}(V)$ 的内点，由 $x\in f^{-1}(V)$ 的任意性即知 $f^{-1}(V)$ 为开集.

充分性. 任取 $x\in X$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V，则 V° 必是含有 $f(x)$ 的开集，因此由条件 $f^{-1}(V^\circ)$ 为含有 x 的开集，注意到 $f^{-1}(V^\circ)\subset f^{-1}(V)$，此即说明 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域，从而 f 在 x 点连续，由 $x\in X$ 的任意性即知 f 在 X 上连续.

注 定理 2.3.1 中的"开集"两字可都改为"闭集".

定理 2.3.2 设 X,Y 为两个度量空间，$f:X\to Y$. 则 f 在 x_0 点连续的充要条件是对于 X 中的任一收敛于 x_0 的点列 (x_n)，Y 中相应的点列 $(f(x_n))$ 均收敛于 $f(x_0)$.

定理 2.3.2 的证明与数学分析中的相应命题的论证方法相同，故不再赘述.

引理 设 A,B 为度量空间 X 中的两个不相交的非空闭集，$-\infty<a<b<+\infty$，则存在连续函数 $f:X\to[a,b]$ 使得 $f(A)=\{a\}$，$f(B)=\{b\}$.

引理的证明留作习题.

定理 2.3.3（连续函数的延拓） 设 E 为度量空间 X 中的闭集，$g:E\to\mathbf{R}$ 连续，则存在连续函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) $f(x)=g(x)$，$x\in E$；

(2) $\inf\limits_{x\in X}f(x)=\inf\limits_{x\in E}g(x)$，$\sup\limits_{x\in X}f(x)=\sup\limits_{x\in E}g(x)$.

证 不妨设 g 为 E 上的有界连续函数（否则考虑 $\arctan(g(x))$），且 $\inf\limits_{x\in E}g(x)=-\sup\limits_{x\in E}g(x)$（否则考虑 $g(x)-\frac{1}{2}(\inf\limits_{x\in E}g(x)+\sup\limits_{x\in E}g(x))$），记

$$g_0=g,\quad m=\sup_{x\in E}g_0(x)=-\inf_{x\in E}g_0(x).$$

若 $m=0$，则取 $f(x)\equiv 0$ 即可，故下设 $m>0$. 令

$$A=g_0^{-1}\{(-\infty,-\frac{m}{3}]\},\quad B=g_0^{-1}\{[\frac{m}{3},+\infty)\},$$

则 A,B 为 E 中的两个不相交的非空(相对)闭集,由于 E 为 X 中闭集,因此 A,B 必为 X 中的两个不相交的非空闭集. 由引理,存在连续函数 $f_0:X\to\left[-\frac{m}{3},\frac{m}{3}\right]$满足 $f_0(A)=\left\{-\frac{m}{3}\right\}$, $f_0(B)=\left\{\frac{m}{3}\right\}$. 定义

$$g_1(x)=g_0(x)-f_0(x),\ x\in E,$$

易知 $g_1:E\to\left[-\frac{2m}{3},\frac{2m}{3}\right]$连续,且

$$-\inf_{x\in E}g_1(x)=\sup_{x\in E}g_1(x)=\frac{2m}{3}.$$

对 g_1 重复上述对 g_0 的过程,可得 X 上的连续函数 f_1 以及 E 上的连续函数 $g_2=g_1-f_1$,满足

$$-\inf_{x\in X}f_1(x)=\sup_{x\in X}f_1(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)m,$$

$$-\inf_{x\in E}g_2(x)=\sup_{x\in E}g_2(x)-\left(\frac{2}{3}\right)^2m.$$

如此进行下去,得到 X 上的连续函数列 (f_n) 以及 E 上的连续函数列 $(g_n)=(g_{n-1}-f_{n-1})$,满足

$$-\inf_{x\in X}f_n(x)=\sup_{x\in X}f_n(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^nm,$$

$$-\inf_{x\in E}g_n(x)=\sup_{x\in E}g_n(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^nm\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$ 在 X 上一致收敛于连续函数 $f(x)$(此处"一致收敛"的定义与"和函数的连续性"的证明与数学分析中的相应定义与证明雷同). 由

$$\left|g_0(x)-\sum_{k=0}^{n-1}f_k(x)\right|=|g_n(x)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^nm,\ x\in E\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$|f(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2m=m,\ x\in X,$$

可知 f 确为 g 的延拓,且满足定理结论中的(2).

定理 2.3.4(压缩映射原理) 设 (X,d) 为完备度量空间,若 $f:X\to X$ 是压缩映照,即存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y), \; x, y \in X,$$

则 f 有惟一的不动点,即存在惟一的 $x^* \in X$ 使得 $f(x^*) = x^*$.

证 任取 $x_0 \in X$,令 $x_n = f(x_{n-1})(n = 1, 2, \cdots)$,得到 X 中的点列 (x_n).注意到

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0), \; n \in \mathbf{N}, \\ d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leqslant (\alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0), \; n, p \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

可知(x_n)为完备度量空间 X 中的 Cauchy 点列,即为 X 中的收敛点列. 记(x_n)的极限为 x^*,则由

$$\begin{aligned} d(x^*, f(x^*)) &\leqslant d(x^*, f(x_n)) + d(f(x_n), f(x^*)) \\ &\leqslant d(x^*, x_{n+1}) + \alpha d(x_n, x^*) \to 0, \end{aligned}$$

可知 $d(x^*, f(x^*)) = 0$, 即 $f(x^*) = x^*$. 又若存在 $y^* \in X$ 为 f 的不动点,则由

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*)) \leqslant \alpha d(x^*, y^*),$$

即知 $y^* = x^*$.

§2.4 R 中的开集及完全集的构造

由于开区间(a, b)(此处 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$)是 **R** 中的开集,因此任意多个开区间之并是开集,特别地,至多可列个两两不交的开区间之并是开集. 另一方面,设 G 是 **R** 中的开集,则对于任一 $x \in G$ 存在 $r > 0$ 使得$(x-r, x+r) \subset G$. 记

$$b := \sup\{\beta \mid \beta > x \text{ 且}(x, \beta) \subset G\},$$

$$a := \inf\{\alpha \mid \alpha < x \text{ 且}(\alpha, x) \subset G\},$$

则开区间(a, b)具有性质:

$$(a, b) \subset G, \quad a \notin G, \; b \notin G.$$

如上所得的开区间(a, b)称为开集 G 的一个构成区间. 于是 **R** 上开集 G 中的每一点必在 G 的一个构成区间内. 此外,由 G 的构成区间的端点不属于 G 可知,G 的任何两个不同的构成区间必不相交. 注意到 **R** 上两两不交的开区间为至多可列个,于是有下述定理.

定理 2.4.1 **R** 中非空集 G 为开集的充要条件是 G 可表为至多可列个两两不交的开区间之并.

由完全集的定义以及定理 2.2.2(3)可知,完全集即为无孤立点的闭集,特别地,若在 **R** 中考察,则有如下结论.

定理 2.4.2(R 中完全集的构造) **R** 中集合 A 为完全集的充要条件是 A^C 为两两不交且无公共端点的开区间之并.

例 Cantor 集 P.

Cantor 集的具体的构造过程如下:

第一步,将闭区间[0,1]三等分,移去中间的开区间 $J_1=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$,留下闭区间 $I_0=\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 与 $I_2=\left[\frac{2}{3}, 1\right]$,记 $G_1=J_1$.

第二步,对 I_0 与 I_2 分别三等分,移去中间的开区间 $J_{01}=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 与 $J_{21}=\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, 且记 $G_2=J_{01}\cup J_{21}$;留下闭区间 $I_{00}=\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $I_{02}=\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$ 与 $I_{20}=\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $I_{22}=\left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

第三步,对留下的四个闭区间施行同样的过程,移去的开区间分别记为 $J_{001}, J_{021}, J_{201}, J_{221}$,且记 $G_3=J_{001}\cup J_{021}\cup J_{201}\cup J_{221}$;留下的闭区间分别记为 $I_{000}, I_{002}, I_{020}, I_{022}, I_{200}, I_{202}, I_{220}, I_{222}$.

如此以往不断地进行下去. 最后,令

$$G=(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n,\quad P=G^C.$$

利用定理 2.4.2 与定理 2.4.1、定理 2.2.4 可知 Cantor 集 P 为无处稠密的完全集. 现说明 P 具有连续统势$\aleph$. 事实上,将[0,1]中的数用三进制小数表示,并约定:0 表为 0.00…,1 表为 0.22…;当有限小数的末位数为 2 时,则在其后添加上一系列 0(我们姑且也称之为无穷小数),例如将 0.××…×2 表为 0.××…×200…;当有限小数的末位数为 1 时,则将其表为无穷小数,例如将 0.××…×1 表为 0.××…×022…. 由此可知,$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ 当且仅当 x 的三进制表示中至少某一位数为数字 1,换言之:$x\in P$ 当且仅当 x 可表为由

0或2作为位数构成的无穷小数，于是由定理1.3.4即知 P 的势为$\aleph$.

习　　题

1. 证明：度量空间中的开球是开集.

2. 试问：度量空间中开球 $B(x_0;\ r)$ 的闭包是否必为闭球 $S(x_0;\ r)$？

3. 设 X 为度量空间，证明：

(1) $X,\varnothing$ 为开集；

(2) 有限个开集的交集为开集；

(3) 任意个开集的并集为开集.

4. 设 X 为拓扑空间，证明：

(1) $X,\varnothing$ 为闭集；

(2) 有限个闭集的并集为闭集；

(3) 任意个闭集的交集为闭集.

5. 试问：度量空间中集合的内点是否必为该集合的聚点？

6. 设 A 为度量空间 X 中的集合，证明：x 为 A 的聚点的充要条件是 x 的任一邻域中含有 A 中的无穷多个点.

7. 设 A 为度量空间 X 中的集合，证明：$(A')'\subset A'$.

8. 设 A,B 为拓扑空间 X 中的集合，证明：

(1) 若 $A\subset B$，则 $A'\subset B'$，$A^\circ\subset B^\circ$，$\overline{A}\subset\overline{B}$；

(2) $(A\cup B)'=A'\cup B'$，$(A\cap B)'\subset A'\cap B'$；

$(A\cup B)^\circ\supset A^\circ\cup B^\circ$，$(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$；

$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{(A\cap B)}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

9. 证明：在度量空间中，

$$\overline{A}\supset B\Leftrightarrow \text{对于任一}\ \varepsilon>0,\text{有}\bigcup_{y\in A}B(y;\ \varepsilon)\supset B.$$

10. 证明：在度量空间中，闭集为 G_δ 型集，开集为 F_σ 型集.

11. 证明：(1)若 A 为 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的非空集合，且 $A\neq\mathbf{R}^n$，则 $\partial A\neq\varnothing$；

(2) $\mathbf{R}^n$ 中既开又闭的集合必为空集 $\varnothing$ 或全空间 $\mathbf{R}^n$.

又问：若将上述 $\mathbf{R}^n$ 改为度量空间 X，相应的命题是否依然为真？

12. 证明：若 A 为度量空间 X 中的完全有界集，则对于任一 $\varepsilon>0$，存在有限个以 A 中的点为中心、ε 为半径的开球之并包含 A.

13. 证明：度量空间中的列紧集必为完全有界集.

14. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中的有界集必为完全有界集. 又问：度量空间中的有界集是否必为完全有界集？

15. 试问：度量空间中的有界点列是否必有收敛子列？

16. 设 (K_n) 为度量空间 X 中的非空单调减紧集序列，证明：$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n\neq\varnothing$. 特别地，若又设 $d(K_n)\to0$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ 为单点集.

又问：若设(K_n)为非空单调减（有界）闭集序列，即使 X 为完备度量空间，是否仍有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \varnothing$？

17. 设 X,Y 为两个度量空间，$f:X\to Y$. 证明：f 在 x_0 点连续的充要条件是对于 X 中的任一收敛于 x_0 的点列(x_n)，Y 中相应的点列$(f(x_n))$均收敛于 $f(x_0)$.

18. 设 X,Y 为两个度量空间，$f:X\to Y$ 连续，A 为 X 中的紧集，证明：$f(A)$为 Y 中的紧集.

19. 设 X,Y 为两个度量空间，$f:X\to Y$ 连续，$E\subset X$，证明：$f(E\ \ )\subset(f(E))\ \ $，且举例说明 $f(E\ \ )\neq(f(E))\ \ $.

20. 设 X,Y 为两个度量空间，E 为 X 中的紧集，$f:E\to Y$ 连续且为双射，证明：f^{-1}连续. 又问：若 E 非紧，则结论如何？

21. 设 X,Y 与 Z 均为度量空间，且其中 Y 为紧空间. 又设有映射 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，其中 g 连续且为双射，$h=g\circ f$. 证明：若 h 连续，则 f 连续. 又问：若 Y 非紧，则结论如何？

22. 设 E 为度量空间 X 中的非空集合，$C(E):=\{f\mid f:E\to\mathbf{R}$ 连续$\}$. 证明：E 为紧集的充要条件是$C(E)\subset B(E)$.

23. 设 X,Y 为两个拓扑空间，f 为 X 到 Y 上的双方连续映射，证明：f 将 X 中的任一开集（闭集）映为 Y 中的开集（相应地，闭集）.

24. 设 X,Y 为两个拓扑空间，$E\subset X$，$f:E\to Y$. 证明：

(1) 若 E 为 X 中的非空开集，则 f 为 E 上的连续映射的充要条件是对于 Y 中的任一开集 V，$f^{-1}(V)$均为 X 中的开集；

(2) 若 E 为 X 中的非空闭集，则 f 为 E 上的连续映射的充要条件是对于 Y 中的任一闭集 W，$f^{-1}(W)$均为 X 中的闭集.

25. 设 X,Y 为两个拓扑空间，$\varnothing\neq E_k\subset X(k=1,2,\cdots,n)$，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，$E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$，$f:E\to Y$，$f(E_k)=\{y_k\}$（$\{y_k\}$表示 Y 中的单点集），$k=1,2,\cdots,n$. 证明：若 $E_k(k=1,2,\cdots,n)$均为开集或均为闭集，则 f 为 E 上的连续映射.

26. 证明：度量空间(X,d)中的距离 d 是两个变元的连续函数，即若 $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$，则 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$.

27. 设 A 为度量空间(X,d)中的非空集合，证明：

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y),\ x,y\in X.$$

28. 设 A,B 为度量空间 X 中的两个不相交的非空闭集，$-\infty<a<b<+\infty$，则存在连续函数 $f:X\to[a,b]$使得 $f(A)=\{a\}$，$f(B)=\{b\}$.

29. 设 A,B 为度量空间 X 中的两个不相交的非空闭集，证明：存在两个不相交的开集 G_A，G_B 使得$A\subset G_A$，$B\subset G_B$.

30. 设 A,B 为度量空间 X 中的两个非空集合，定义

$$d(A,B):=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,\ y\in B\}.$$

证明：若 A 为非空紧集，B 为非空闭集，且 $A\cap B=\varnothing$，则 $d(A,B)>0$.

又问:若将上述 A 改为非空闭集,相应的命题是否依然为真?

31. 证明:可分度量空间的任一子空间是可分的.

32. 证明:离散度量空间 X 为可分空间的充要条件是 X 为至多可数集.

33. 证明:l^∞ 是不可分空间.

34. 证明:$B[a, b]$是不可分空间.

35. 设 $C[a, b)$为$[a, b)$上的有界连续函数全体,且在其上引进上确界距离,试问:空间 $C[a, b)$是否可分? 又问:空间 $C[a, b]$是否可分? 为什么?

36. 证明:收敛数列全体 c 按上确界距离所成之度量空间是可分空间.

37. 设 X 为可分度量空间,证明:X 的任一开覆盖中必存在一可数子覆盖.

38. 证明:离散度量空间、有界函数空间 $B(X)$(及其特例 l^∞)均为完备度量空间.

39. 证明:完备度量空间 X 的子空间M 为完备子空间的充要条件是M 为X 的闭子空间.

40. 设(E_n)为完备度量空间 X 中的稠密开集序列,证明:$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 也为X 的稠密集.

41. 证明:完备度量空间中的任一稠密的第一类型集均非 G_δ 型集.

42. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,证明:$f$ 的连续点集是 $\mathbf{R}$ 中的 G_δ 型集.

43. 证明:不存在于 $\mathbf{R}$ 上一切有理点连续而无理点间断的实函数.

44. 设 $f, f_n \in B(X)$, $d(f_n, f)\to 0$, (x_k)为 X 中点列.证明:

(1) 若对于任一 $n\in\mathbf{N}$,$(f_n(x_k))_{k\geq 1}$均为收敛数列,则$(f(x_k))$也是收敛数列.

(2) 若对于任一 $n\in\mathbf{N}$,有$\lim\limits_{k\to\infty} f_n(x_k)=0$,则$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=0$.

(3) c 以及 c_0(无穷小数列全体)按上确界距离均为完备度量空间.

(4) 记

$$\mathscr{C}_{00} := \{x=(\xi_n) \mid \xi_n\in\mathbf{R}(\text{或}\,\mathbf{C})\text{ 且 }\exists N_x\in\mathbf{N}\,\forall n>N_x\text{ 有 }\xi_n=0\},$$

则 $\mathscr{C}_{00}$按上确界距离不是完备空间;c_{00}的完备化空间是 c_0.

45. 设 X 为紧度量空间,$f: X\to X$ 满足:

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ x, y\in X(x\neq y),$$

证明:f 存在惟一的不动点.

46. 设 X 为完备度量空间,$f: X\to X$,且存在 $n\in\mathbf{N}$,使得 $f_n := \underbrace{f\circ\cdots\circ f\circ f}_{n\text{次}}$为$X$ 上的压缩映射,证明:f 存在惟一的不动点.

47. 设 X 为完备度量空间,$f: X\to X$,记 $f_n := \underbrace{f\circ\cdots\circ f\circ f}_{n\text{次}}$,

$$\alpha_n := \sup_{x\neq y}\frac{d(f_n(x), f_n(y))}{d(x, y)}\quad(n=1, 2, \cdots).$$

证明:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛,则 f 存在惟一的不动点.

第三章　测　　度

§3.1　集合代数

3.1.1　集合代数与 σ 代数

定义 3.1.1　设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个非空集族,如果 $\mathscr{A}$ 满足

(1) 若 $E\in\mathscr{A}$,则 $E^C\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $E,F\in\mathscr{A}$,则 $E\cup F\in\mathscr{A}$,

那么 $\mathscr{A}$ 称为 X 上的一个代数.若将上述(2)改为

(2′) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$,

那么 $\mathscr{A}$ 称为 X 上的一个 σ 代数.(显然,σ 代数必是代数.)

若 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个 σ 代数,则 $(X,\mathscr{A})$ 称为可测空间,$\mathscr{A}$ 中的元素称为 X 上的 $\mathscr{A}$-可测集,简称为可测集.

定理 3.1.1　设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个代数,那么

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{A}$;

(2) 若 $E,F\in\mathscr{A}$,则 $E\cap F\in\mathscr{A}$,$E\setminus F\in\mathscr{A}$.

如果 $\mathscr{A}$ 是 σ-代数,那么还有

(3) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\mathscr{A}$.

证　(1)因为 $\mathscr{A}$ 为 X 上非空集族,所以存在 $E\in\mathscr{A}$,由定义,$E^C\in\mathscr{A}$,于是 $X=E\cup E^C\in\mathscr{A}$,$\varnothing=X^C\in\mathscr{A}$.

(2) 设 $E,F\in\mathscr{A}$,则 E^C, $F^C\in\mathscr{A}$,于是 $E\cap F=(E^C\cup F^C)^C\in\mathscr{A}$,进而 $E\setminus F=E\cap F^C\in\mathscr{A}$.

(3) 设 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n=(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^C)^C\in\mathscr{A}$.

推论　设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个 σ 代数,若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E_n\in\mathscr{A}$.

证　由上、下限集以及 σ-代数的定义与定理 3.1.1(3)即得.

定理 3.1.2　设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个非空集族,那么 $\mathscr{A}$ 为代数的充要条件是:若 $E,F\in\mathscr{A}$,则 E^C, $E\cap F\in\mathscr{A}$.

定理 3.1.3　设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的代数,那么 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数的充要条件是:若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$.

上述定理 3.1.2 与定理 3.1.3 的证明留作练习.

设 $\mathscr{F}$ 是集合 X 上的一个非空集族,一般说来 $\mathscr{F}$ 不一定是代数(或 σ 代数),但是存在包含 $\mathscr{F}$ 的代数(σ 代数),例如 $\mathscr{P}(X)$ 就是其中之一. 容易验证,包含 $\mathscr{F}$ 的一切代数(σ 代数)之交仍是一个包含 $\mathscr{F}$ 的代数(σ 代数),记之为 $\mathbf{K}(\mathscr{F})(\mathbf{S}(\mathscr{F}))$,并称之为由集族 $\mathscr{F}$ 生成的代数(σ 代数). 显然 $\mathbf{K}(\mathscr{F})(\mathbf{S}(\mathscr{F}))$ 是包含 $\mathscr{F}$ 的最小代数(σ 代数).

易证,$\mathbf{S}(\mathscr{F})=\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathscr{F}))$.

定理 3.1.4 设 $\mathscr{F}$ 是集合 X 上的一个非空集族,集族

$$\mathscr{A}:=\{A \mid A \text{ 可表为 } \mathscr{F} \text{ 中有限个两两不交的元素之并}\}.$$

如果 $\mathscr{F}$ 满足

(1) 若 $E,F\in\mathscr{F}$,则 $E\cap F\in\mathscr{F}$;

(2) 若 $E\in\mathscr{F}$,则 $E^C\in\mathscr{A}$,

那么 $\mathbf{K}(\mathscr{F})=\mathscr{A}$.

证 由 $\mathscr{A}$ 以及 $\mathbf{K}(\mathscr{F})$ 的定义可知:$\mathscr{F}\subset\mathscr{A}\subset\mathbf{K}(\mathscr{F})$,且只需证明 $\mathscr{A}$ 是代数即可,因此只需验证 $\mathscr{A}$ 满足定理 3.1.2 的条件.

任取 $E,F\in\mathscr{A}$,则可记

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}E_i,\quad F=\bigcup_{j=1}^{n}F_j,$$

其中 $E_i,\ F_j\in\mathscr{F},\ E_i\cap E_j=\varnothing, F_i\cap F_j=\varnothing\,(i\neq j)$, 于是

$$E\cap F=\bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}(E_i\cap F_j).$$

由(1)知 $E_i\cap F_j\in\mathscr{F}$, 且易知 $\{E_i\cap F_j\mid 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ 中的元素是两两不交的,故 $E\cap F\in\mathscr{A}$. 又由(2)知 $E_i^C\in\mathscr{A}$,故由已证之结论结合归纳法可知 $E^C=\bigcap_{i=1}^{m}E_i^C\in\mathscr{A}$.

例 设 $\mathscr{F}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中形如

$$(a,\ b],\ (a,\ +\infty),\qquad -\infty\leqslant a\leqslant b<+\infty$$

的区间全体. 显然,若 $I_1,\ I_2\in\mathscr{F}$,则 $I_1\cap I_2\in\mathscr{F}$;若 $I\in\mathscr{F}$,则 $I^C=\mathbf{R}-I$ 可表为 $\mathscr{F}$ 中有限个(实际上至多两个)两两不交的元素之并. 于是由定理 3.1.3 知 $\mathbf{K}(\mathscr{F})$ 即是 $\mathscr{F}$ 中有限个两两不交的元素之并的全体.

3.1.2 单调族

基于今后个别定理证明需要的考虑,我们对单调族的概念作一简要介绍.

定义 3.1.2 设 $\mathscr{D}$ 为集合 X 上的非空集族，若对于 $\mathscr{D}$ 中的任一单调集列 (E_n) 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n \in \mathscr{D}$，则称 $\mathscr{D}$ 为 X 上的一个单调族.

易证，σ 代数必为单调族；单调代数（即既是代数又是单调族的集族）必为 σ 代数.

设 $\mathscr{F}$ 为 X 上的非空集族，易知包含 $\mathscr{F}$ 的一切单调族之交 $\mathbf{M}(\mathscr{F})$ 仍为包含 $\mathscr{F}$ 的单调族，$\mathbf{M}(\mathscr{F})$ 称为由 $\mathscr{F}$ 生成的单调族. 显然，$\mathbf{M}(\mathscr{F})$ 是包含 $\mathscr{F}$ 的最小单调族.

定理 3.1.5 若 $\mathscr{A}$ 为集合 X 上的代数，则 $\mathbf{M}(\mathscr{A}) = \mathbf{S}(\mathscr{A})$.

证 注意到 $\mathbf{S}(\mathscr{A})$ 必为包含 $\mathscr{A}$ 的单调族，由 $\mathbf{M}(\mathscr{A})$ 的定义即知 $\mathbf{M}(\mathscr{A}) \subset \mathbf{S}(\mathscr{A})$. 为证相反的包含关系成立，只需证明 $\mathbf{M}(\mathscr{A})$ 为（包含 $\mathscr{A}$ 的单调）代数.

为此，对于任一 $F \in \mathbf{M}(\mathscr{A})$，令

$$\mathscr{F} := \{E \mid E \in \mathbf{M}(\mathscr{A}),\ 且\ E^C,\ E \cup F \in \mathbf{M}(\mathscr{A})\}.$$

显然，$\mathscr{F} \subset \mathbf{M}(\mathscr{A})$ 且 $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$.

任取 $\mathscr{F}$ 中的单调集列 (E_n)，则 $(E_n \cup F)$ 与 (E_n^C) 均为 $\mathbf{M}(\mathscr{A})$ 中单调集列，且

$$\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathbf{M}(\mathscr{A}),$$

$$(\lim_{n\to\infty} E_n) \cup F = \lim_{n\to\infty} (E_n \cup F) \in \mathbf{M}(\mathscr{A}),$$

$$(\lim_{n\to\infty} E_n)^C = \lim_{n\to\infty} E_n^C \in \mathbf{M}(\mathscr{A}),$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} E_n \in \mathscr{F}$. 此即说明 $\mathscr{F}$ 为单调族，从而 $\mathscr{F} = \mathbf{M}(\mathscr{A})$.

由上述所证之结论即可说明 $\mathbf{M}(\mathscr{A})$ 为代数. 事实上，若 $E, F \in \mathbf{M}(\mathscr{A})$，则 $E \in \mathscr{F}$，即得 $E^C \in \mathbf{M}(\mathscr{A})$，$E \cup F \in \mathbf{M}(\mathscr{A})$. 证毕.

§3.2 测度的概念及其基本性质

3.2.1 拓广实数系 $\mathbf{R}^*$

拓广实数系 $\mathbf{R}^*$ 是 $\mathbf{R}$ 加上两个符号 $-\infty$ 及 $+\infty$，即 $\mathbf{R}^* := \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$，且 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $-\infty < x < +\infty$. 若 $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$，则定义

$$[a, b] := \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) := \{x \mid a < x < b\},$$

$$[a, b) := \{x \mid a \leqslant x < b\}, \quad (a, b] := \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

（若 $a = b$，则上述后三个区间均为 $\varnothing$），并定义运算规则

$$a + (+\infty) = +\infty,\ a \in (-\infty, +\infty];$$

$$a + (-\infty) = -\infty, \ a \in [-\infty, +\infty);$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & a \in (0, +\infty], \\ 0, & a = 0, \\ \mp\infty, & a \in [-\infty, 0); \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \ a \in (-\infty, +\infty).$$

3.2.2 测度

定义 3.2.1 设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的代数或 σ 代数,如果函数 $\mu: \mathscr{A} \to \mathbf{R}^*$ 满足

(1) $\mu(E) \geqslant 0, \ E \in \mathscr{A}$;

(2) $\mu(\varnothing) = 0$;

(3) 若 (E_n) 是 $\mathscr{A}$ 中两两不交的集合序列,且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$,则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

那么就称 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的一个测度,$(X, \mathscr{A}, \mu)$ 称为测度空间,$\mathscr{A}$ 中的元素称为 μ-可测集,简称为可测集.

(**注** 当 $\mathscr{A}$ 是 σ 代数时,上述(3)中条件"$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}$"是多余的.有时,我们也使用"$X$ 是一测度空间"、"μ 是一测度"、"μ 为 X 上的测度"这类说法.)

若 $\mu(X) < +\infty$,则称 μ 为(全)有限测度;若存在 $\{E_n\} \subset \mathscr{A}$ 使得 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 且 $\mu(E_n) < +\infty (n = 1, 2, \cdots)$,则称 μ 为(全)σ 有限测度;若 $E \in \mathscr{A}$ 满足 $\mu(E) = 0$,则称 E 为 μ 零测集,简称为零测集;若任一 μ 零测集的任一子集均属于 $\mathscr{A}$,则称测度空间 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为完备的,μ 称为完备测度.

例 1 设 $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$,固定 $x \in X$,定义

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \qquad E \in \mathscr{P}(X),$$

则 μ 是测度,通常称之为点测度(Dirac measure).

例 2 设 $\mathscr{A} = \mathscr{P}(X)$,定义

$$\mu(E) = \begin{cases} \overline{\overline{E}}, & \overline{\overline{E}} < \aleph_0, \\ +\infty, & \overline{\overline{E}} \geqslant \aleph_0, \end{cases} \qquad E \in \mathscr{P}(X),$$

则 μ 是测度,通常称之为计数测度(counting measure).

例 3 设 $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\mathbf{N})$,$(p_n)$是非负实数列,定义

$$\mu(E)=\sum_{k\in E}p_k,\ E\in\mathscr{P}(\mathbf{N}),$$

则 μ 是完备的σ 有限测度;此外当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n<+\infty$ 时,μ 是有限的. 特别地,若 $p_n=1(n=1,2,\cdots)$,则 μ 即为计数测度.

3.2.3 测度的基本性质

定理 3.2.1 设 $\mathscr{A}$ 为集合 X 上的代数或σ 代数(当 $\mathscr{A}$ 是代数时,则假定下述各点的结论中所涉之集均属于 $\mathscr{A}$),μ 为 $\mathscr{A}$ 上的测度.

(1)(有限可加性)若 $E_1,\cdots,E_n$ 为 $\mathscr{A}$ 中两两不交的元素,则 $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(E_k)$;

(2)(单调性)若 $E,F\in\mathscr{A}$ 且 $E\subset F$,则 $\mu(E)\leqslant\mu(F)$;

(3)(减性)若 $E,F\in\mathscr{A},E\subset F$ 且$\mu(F)<+\infty$,则 $\mu(F\setminus E)=\mu(F)-\mu(E)$;

(4)(次可列可加性)若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$;

(5)(下半连续性)若 $E_n\uparrow$,则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

(6)(上半连续性)若 $E_n\downarrow$,且存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\mu(E_{n_0})<+\infty$,则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

(7) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\mu(\varliminf\limits_{n\to\infty}E_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

(8) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$且存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}E_n)<+\infty$,则 $\mu(\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

(9)(连续性) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,$\lim\limits_{n\to\infty}E_n$ 存在,且存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=n_0}^{\infty}E_n)<+\infty$,则 $\mu(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu(E_n)$;

(10) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,且存在 $n_0\in\mathbf{N}$ 使得 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\mu(E_n)<+\infty$,则 $\mu(\varlimsup\limits_{n\to\infty}E_n)=0$.

证 我们只证明(1)~(5),其余(6)~(10)的证明留作练习.

(1) 只需取 $E_{n+1}=E_{n+2}=\cdots=\varnothing$,由测度的定义即得所证.

(2) 因为 $E\subset F$,所以 $F=E\cup(F\setminus E)$,且 $E\cap(F\setminus E)=\varnothing$,由(1)及测度的非负性,

$$\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\setminus E)\geqslant\mu(E).$$

(3) 因为 $\mu(F)<+\infty$,$E\subset F$,由(2)可知 $\mu(E)<+\infty$,再利用 $\mu(F)=\mu(E)+\mu(F\setminus E)$经移项后即得所证.

(4) 令 $F_1=E_1$, $F_n=E_n\setminus\bigcup_{k=1}^{n-1}E_k\ (n=2,3,\cdots)$,则$(F_n)$为两两不交可测集列,且 $F_n\subset E_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 于是

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n).$$

(5) 令 $F_1=E_1$,$F_n=E_n\setminus E_{n-1}\ (n=2,3,\cdots)$,则$(F_n)$为两两不交可测集列,且 $E_n=\bigcup_{k=1}^{n}F_k$, $\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$,于是

$$\mu\left(\lim_{n\to\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(F_k)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}F_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

§3.3 Caratheodory 外测度方法

3.3.1 Caratheodory 外测度及其产生测度的 C 外测度法

定义 3.3.1 设 $\mathscr{A}$为集合 X 上的σ 代数,如果函数 $\mu^*:\mathscr{A}\to\mathbf{R}^*$ 满足:

(1) $\mu^*(E)\geqslant 0$, $E\in\mathscr{A}$;

(2) $\mu^*(\varnothing)=0$;

(3) 若 $E,F\in\mathscr{A}$且 $E\subset F$,则 $\mu^*(E)\leqslant\mu^*(F)$;

(4) 若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,则 $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$,

那么称 μ^* 为 $\mathscr{A}$ 上的外测度.

定理 3.3.1 (C 外测度法) 设 μ^* 为 σ 代数 $\mathscr{P}(X)$上的外测度,令

$$\mathscr{A}^*=\{E\mid E\in\mathscr{P}(X),$$

$$\text{且 }\forall\,T\in\mathscr{P}(X)\text{ 均有 }\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^C)\},$$

则 $\mathscr{A}^*$ 是 X 上的一个σ 代数,μ^* 在 $\mathscr{A}^*$ 上的限制函数是 $\mathscr{A}^*$ 上的完备测度.

证 利用定理 3.1.3,我们分两步证明 $\mathscr{A}^*$ 是 X 上的σ 代数.

首先证明 $\mathscr{A}^*$ 是 X 上的代数. 设 $E,F\in\mathscr{A}^*$,则由 $\mathscr{A}^*$ 的定义即知 $E^C\in\mathscr{A}^*$;又,对于任一 $T\in\mathscr{P}(X)$,有

$$\mu^*(T\cap(E\cup F))+\mu^*(T\cap(E\cup F)^C)$$
$$=\mu^*(T\cap(E\cup(F\cap E^C)))+\mu^*(T\cap E^C\cap F^C)$$
$$\leqslant\mu^*(T\cap E)+\mu^*((T\cap E^C)\cap F)+\mu^*((T\cap E^C)\cap F^C)$$
$$=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^C)=\mu^*(T),$$

而由外测度的次可加性,相反的不等式恒成立,从而 $E\cup F\in\mathcal{A}^*$.

其次,设(E_n)为 $\mathcal{A}^*$ 中两两不交的元素所成之序列,往证$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{A}^*$,即证明

$$\mu^*(T)\geqslant\mu^*(T\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)+\mu^*(T\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)^C),\ T\in\mathcal{P}(X).$$

为此,注意到在所设(E_n)的条件下,有

$$\mu^*(T\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k)=\sum_{k=1}^{n}\mu^*(T\cap E_k)\ (n=1,2,\cdots).$$

事实上,当 $n=1$ 时上式显然成立.假设 $n=m$ 时上式成立,则当 $n=m+1$ 时,由于 $E_{m+1}\in\mathcal{A}^*$, 且$(\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k)\cap E_{m+1}=E_{m+1}$, $(\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k)\cap E_{m+1}^C=\bigcup_{k=1}^{m}E_k$, 因此

$$\begin{aligned}\mu^*(T\cap\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k)&=\mu^*((T\cap\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k)\cap E_{m+1})+\mu^*((T\cap\bigcup_{k=1}^{m+1}E_k)\cap E_{m+1}^C)\\&=\mu^*(T\cap E_{m+1})+\mu^*(T\cap\bigcup_{k=1}^{m}E_k)\\&=\mu^*(T\cap E_{m+1})+\sum_{k=1}^{m}\mu^*(T\cap E_k)\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\mu^*(T\cap E_k),\end{aligned}$$

从而由数学归纳法可知上式对任一自然数均成立.

此外,由于已证 $\mathcal{A}^*$ 是代数,因此$\bigcup_{k=1}^{n}E_k\in\mathcal{A}^*$ ($n=1,2,\cdots$),于是对于任一 $T\in\mathcal{P}(X)$有

$$\begin{aligned}\mu^*(T)&=\mu^*(T\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k)+\mu^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{n}E_k)^C)\\&\geqslant\mu^*(T\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k)+\mu^*(T\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)^C)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^*(T \cap E_k) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^C) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

对上式两端令 $n \to \infty$,得

$$\mu^*(T) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_n) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^C)$$

$$\geqslant \mu^*(T \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^C).$$

至此,我们证明了 $\mathscr{A}^*$ 为 σ 代数.

以下证明 μ^* 在 $\mathscr{A}^*$ 上的限制函数(仍记作 μ^*)为完备测度.

设(E_n)为 σ 代数 $\mathscr{A}^*$ 中两两不交的元素所成之序列,则在已证不等式

$$\mu^*(T) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T \cap E_n) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^C)$$

中特别取 $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{A}^*$,即知 μ^* 在 $\mathscr{A}^*$ 上的限制函数满足

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

而相反不等式恒成立,于是 μ^* 在 $\mathscr{A}^*$ 上具有可列可加性,至于测度定义中的其他条件与外测度定义的相应条件相同,这就说明了 μ^* 为 $\mathscr{A}^*$ 上的测度.

现设 $E \in \mathscr{A}^*$ 且 $\mu^*(E) = 0$,任取 $F \subset E$,则对于任一 $T \in \mathscr{P}(X)$,有

$$\mu^*(T) \leqslant \mu^*(T \cap F) + \mu^*(T \cap F^C)$$

$$\leqslant \mu^*(F) + \mu^*(T) \leqslant \mu^*(E) + \mu^*(T) = \mu^*(T),$$

所以上式成为等式,此即说明 $F \in \mathscr{A}^*$,也就证明了测度 μ^* 的完备性.

至此定理证毕.

3.3.2 测度空间的扩张

定义 3.3.2 设$(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$和$(X, \mathscr{A}_2, \mu_2)$为两个测度空间,若 $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2$ 且 μ_2 是 μ_1 的延拓,则称$(X, \mathscr{A}_2, \mu_2)$为$(X, \mathscr{A}_1, \mu_1)$的扩张.

定理 3.3.2 设 $\mathscr{A}$ 为集合 X 上的代数,μ 为 $\mathscr{A}$ 上的测度,定义 $\mu^*: \mathscr{P}(X) \to \mathbf{R}^*$,

$$\mu^*(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid \forall E_n \in \mathscr{A}(n = 1,2,\cdots), \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset E\}, E \in \mathscr{P}(X),$$

则 (1)μ^* 为 $\mathscr{P}(X)$上的外测度(称之为由 μ 导出的外测度);

(2) 由 C 外测度法所得测度空间$(X, \mathscr{A}^*, \mu^*)$是$(X, \mathscr{A}, \mu)$的扩张.

证 (1) 由 μ^* 的定义即知 μ^* 是 $\mathscr{P}(X)$ 上的非负函数；又因为 $\mathscr{A}$ 为代数，所以可取 $E_n = \varnothing \in \mathscr{A}(n = 1, 2, \cdots)$，则有 $0 \leqslant \mu^*(\varnothing) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) = 0$，从而 $\mu^*(\varnothing) = 0$.

其次，设 $E, F \in \mathscr{P}(X)$，$E \subset F$，则

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \mid \forall E_n \in \mathscr{A}(n = 1, 2, \cdots), \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \supset E\}$$

$$\supset \{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \mid \forall E_n \in \mathscr{A}(n = 1, 2, \cdots), \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \supset F\},$$

从而由 μ^* 的定义即知 $\mu^*(E) \leqslant \mu^*(F)$.

最后，设 $E_n \in \mathscr{P}(X)(n = 1, 2, \cdots)$，往证

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n).$$

若存在 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\mu^*(E_n) = +\infty$，则上述不等式显然成立，故下设 $\mu^*(E_n) < +\infty(n = 1, 2, \cdots)$. 由 μ^* 的定义，对于任一 $\varepsilon > 0$ 以及 $n \in \mathbf{N}$，存在 $E_k^{(n)} \in \mathscr{A}(k = 1, 2, \cdots)$使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^{(n)} \supset E_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^{(n)}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

于是 $\bigcup_{n, k \in \mathbf{N}}E_k^{(n)} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，且

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) \leqslant \sum_{n, k \in \mathbf{N}}\mu(E_k^{(n)}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^{(n)}) < \sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性即得 μ^* 的次可列可加性.

(2) 首先证明 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}^*$，即往证：若 $E \in \mathscr{A}$，则成立

$$\mu^*(T) \geqslant \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^C), \quad T \in \mathscr{P}(X).$$

若 $\mu^*(T) = +\infty$，则上式显然成立，故下设 $\mu^*(T) < +\infty$，于是对于任一 $\varepsilon > 0$，存在 $E_n \in \mathscr{A}(n = 1, 2, \cdots)$使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \supset T, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) < \mu^*(T) + \varepsilon.$$

注意到 $\mathscr{A}$ 为代数，且 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的测度，因此 $E \cap E_n, E^C \cap E_n \in \mathscr{A}$，且

$$\mu(E_n)=\mu(E\cap E_n)+\mu(E^C\cap E_n)\ (n=1,2,\cdots).$$

又因为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)=E\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset E\cup T,$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(E^C\cap E_n)=E^C\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset E^C\cap T,$$

所以

$$\begin{aligned}&\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^C)\\ \leqslant&\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap E_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E^C\cap E_n)\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}(\mu(E\cap E_n)+\mu(E^C\cap E_n))\\ =&\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)<\mu^*(T)+\varepsilon,\end{aligned}$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得所证.

其次证明 $\mathscr{A}^*$ 上的测度 μ^* 是 $\mathscr{A}$ 上的测度 μ 的延拓.

设 $E\in\mathscr{A}$. 由 μ^* 的定义，若取 $E_1=E$, $E_n=\varnothing(n=2,3,\cdots)$，则有 $\mu^*(E)\leqslant\mu(E)$；另一方面，若 $E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset E$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap E_n)=E\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E\in\mathscr{A}$, $E\cap E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$，于是

$$\mu(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E\cap E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

再由 μ^* 的定义即得 $\mu(E)\leqslant\mu^*(E)$. 从而证明了 $\mu(E)=\mu^*(E)$.

至此定理证毕.

推论　$\mathscr{A}^*\supset\mathbf{S}(\mathscr{A})$，且$(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\mu^*)$为一测度空间.

定理 3.3.3　若 $\mathscr{A}$ 是 X 上的代数，μ 为 $\mathscr{A}$ 上的有限或 σ 有限测度，则在 $\mathbf{S}(\mathscr{A})$上存在且只存在一个测度 μ^* 使得$(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\mu^*)$是$(X,\mathscr{A},\mu)$的扩张.

证　由定理 3.3.2 及其推论可知，$(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\mu^*)$是$(X,\mathscr{A},\mu)$的一个扩张，因此我们只需证明“扩张”的惟一性. 以下只在“μ 为 $\mathscr{A}$ 上的有限测度”假设下加以证明，而“μ 为 $\mathscr{A}$ 上的 σ 有限测度”条件下的证明留作练习.

设$(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\nu)$是$(X,\mathscr{A},\mu)$的另一个扩张. 令

$$\mathscr{D}:=\{E\mid E\in\mathbf{S}(\mathscr{A}),\ \nu(E)=\mu^*(E)\},$$

则显然有 $\mathscr{D}\subset\mathbf{S}(\mathscr{A})$. 另一方面,任取 $\mathscr{D}$ 中的单调序列 (E_n),则 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$;又由 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的有限测度可知,ν 与 μ^* 均为 $\mathbf{S}(\mathscr{A})$ 上的有限测度,于是

$$\nu(\lim_{n\to\infty}E_n)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)=\lim_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(\lim_{n\to\infty}E_n),$$

此即说明 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\mathscr{D}$,从而 $\mathscr{D}$ 是 X 上的一个单调族. 注意到,由于 $\mathscr{A}$ 为代数且 $\mathscr{A}\subset\mathscr{D}$,故由定理 3.1.5 可知 $\mathbf{S}(\mathscr{A})=\mathbf{M}(\mathscr{A})\subset\mathscr{D}$. 由此证得 $\mathbf{S}(\mathscr{A})=\mathscr{D}$, 即在 $\mathbf{S}(\mathscr{A})$ 上测度 ν 与 μ^* 相等,亦即 $(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\nu)=(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\mu^*)$.

定理 3.3.4 设 $\mathscr{A}$ 为 X 上的代数,μ 为 $\mathscr{A}$ 上的有限或 σ 有限测度,μ^* 是由 μ 导出的 $\mathscr{P}(X)$ 上的外测度,$\mathscr{A}^*$ 是由 C 外测度法所得的 μ^* 可测集全体,则对任一 $E\in\mathscr{A}^*$,存在 $A,B\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$ 使得 $A\subset E\subset B$ 且

$$\mu^*(E\setminus A)=\mu^*(B\setminus E)=\mu^*(B\setminus A)=0.$$

证 由定理 3.3.2 推论,$\mathbf{S}(\mathscr{A})\subset\mathscr{A}^*$.

(1) 若 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的有限测度,则 μ^* 为 $\mathscr{A}^*$ 上的有限测度,于是 $\mu^*(E)<+\infty(E\in\mathscr{A}^*)$. 由 μ^* 的定义,对于任一 $n\in\mathbf{N}$,存在 $E_k^{(n)}\in\mathscr{A}(k=1,2,\cdots)$满足

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^{(n)}\supset E,\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^{(n)})<\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

现取 $B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k^{(n)}$, 则 $B\in\mathbf{S}(\mathscr{A}),B\supset E$,且

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(B)\leqslant\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^{(n)})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(E_k^{(n)})=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k^{(n)})$$

$$<\mu^*(E)+\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

由此得 $\mu^*(E)=\mu^*(B)<+\infty$,从而有

$$\mu^*(B\setminus E)=\mu^*(B)-\mu^*(E)=0.$$

由上述已证之结论可知,对于 $E\in\mathscr{A}^*$(必有 $E^C\in\mathscr{A}^*$ 且 $\mu^*(E^C)<+\infty$),存在 $G\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$满足:

$$G\supset E^C\ 且\ \mu^*(G\setminus E^C)=0.$$

注意到,$G\setminus E^C=E\setminus G^C$,$G^C\subset E$ 且 $G^C\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$,于是令 $A=G^C$ 即得所需之 A.

(2) 若 μ 为 $\mathscr{A}$ 上的 σ 有限测度,则 μ^* 为 $\mathscr{A}^*$ 上的 σ 有限测度,于是存在 $E_n\in\mathscr{A}^*$ 使得 $\mu^*(E_n)<+\infty(n=1,2,\cdots)$且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n=X$. 由此可知,对于

$E\in\mathscr{A}^*$,

$$\mu^*(E\cap E_n)\leqslant\mu^*(E_n)<+\infty;$$

$$\mu^*(E^C\cap E_n)\leqslant\mu^*(E_n)<+\infty\quad(n=1,2,\cdots).$$

故由上述(1)的证明可知,存在 $B_n,G_n\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$满足

$$B_n\supset E\cap E_n, 0=\mu^*(B_n\setminus(E\cap E_n))\geqslant\mu^*(B_n\setminus E);$$

$$G_n\supset E^C\cap E_n,\ 0=\mu^*(G_n\setminus(E^C\cap E_n))\geqslant\mu^*(G_n\setminus E^C).$$

现取 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$, $A=(\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n)^C$,则容易验证此 A,B 满足所需之条件.

至此定理证毕.

§3.4 R 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度

设$\mathscr{F}$表示 **R** 中形如

$$(a,b],(a,+\infty),\qquad -\infty\leqslant a\leqslant b<+\infty$$

的区间全体.称 $\mathbf{S}(\mathscr{F})$为 Borelσ 代数,一般记 $\mathbf{S}(\mathscr{F})$为 $\mathscr{B}$,$\mathscr{B}$ 中的元素称为 Borel 集.由于

$$(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,b-\frac{1}{n}],$$

故开区间$(a,b)\in\mathscr{B}$,从而 **R** 中的开集、闭集、G_δ 型集以及 F_σ 型集都是 Borel 集.

易知,由 **R** 中的全体开集生成的 σ 代数与 $\mathbf{S}(\mathscr{F})$一致.

一般地,我们有如下定义.

定义 3.4.1 设 X 为拓扑空间,$\mathscr{B}$ 为 X 中全体开集所生成的σ 代数,则称 $\mathscr{B}$ 中的元素为 X 的 Borel 集.

由定义即知,拓扑空间中的开集、闭集、F_σ型集、G_δ型集均为 Borel 集.

设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为非减右连续函数,定义 $m_g:\mathbf{K}(\mathscr{F})\to[0,+\infty]$,

$$m_g((a,b])=g(b)-(a),$$

$$m_g((a,+\infty))=g(+\infty)-g(a),$$

其中

$$-\infty\leqslant a\leqslant b<+\infty, g(\pm\infty):=\lim_{x\to\pm\infty}g(x),$$

$$m_g(\bigcup_{j=1}^{n} I_j) = \sum_{j=1}^{n} m_g(I_j),\ I_j \in \mathscr{F},\ I_j \cap I_k = \varnothing (j \neq k),$$

则可以证明:m_g 是 $\mathbf{K}(\mathscr{F})$上的 σ 有限测度.

由于 m_g 是 $\mathbf{K}(\mathscr{F})$上的 σ 有限测度,于是 m_g 可延拓为 $\mathscr{A}^*$(此处记作 $\mathscr{L}_g$)上的完备 σ 有限测度(习惯上仍记作 m_g,而将 $m_g{}^*$ 只视作相应的 $\mathscr{P}(\mathbf{R})$上的外测度),并称之为由函数 g 导出的 L-S 测度,$\mathscr{L}_g$ 中的元素称为 L-S 可测集.因为 $\mathscr{B} \subset \mathscr{L}_g$,所以 **R** 上的 Borel 集均为 L-S 可测集.特别地,若 $g(x)=x$,则记 $m_g = m$,并称之为 Lebesgue 测度,此时 $\mathscr{L}_g$ 中的元素称为 L 可测集,通常记此 $\mathscr{L}_g$ 为 $\mathscr{L}$.

例 设$\{a\}$为 **R** 中的单点集,则

$$m_g(\{a\}) = m_g(\lim(a - 1/n,\ a]) = \lim m_g((a - 1/n,\ a])$$

$$= \lim(g(a) - g(a - 1/n)) = g(a) - g(a - 0);$$

$$m_g([a,\ b]) = m_g(\{a\} \cup (a,\ b]) = m_g(\{a\}) + m_g((a,\ b])$$

$$= g(b) - g(a - 0);$$

$$m_g((a,\ b)) = m_g((a,\ b] - \{b\}) = m_g((a,\ b]) - g(\{b\})$$

$$= g(b - 0) - g(a);$$

$$m_g([a,\ b)) = m_g((a,\ b) \cup \{a\}) = m_g((a,\ b)) + m_g(\{a\})$$

$$= g(b - 0) - g(a - 0).$$

特别地,

$$m(\{a\}) = 0;$$

$$m((a,\ b]) = m([a,\ b)) = m((a,\ b)) = m([a,\ b]) = b - a.$$

定义 3.4.2 设 $\mathscr{B}$ 是 **R** 中的 Borel 集全体组成的 σ 代数,μ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度,且在任一有界集上取值有限,则称 μ 为(**R** 上的)Borel 测度,此时 $\mathscr{B}$ 中的元素称为 **R** 上的 Borel 可测集.

定理 3.4.1 **R** 上的 Borel 可测集必为 L-S 可测集,即任意给定 **R** 上的 Borel 测度 μ,必存在非减右连续实值函数 $g:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,使得由 g 导出的测度 m_g 与 μ 在 $\mathscr{B}$ 上相等.

证 我们只给出函数 g 的构造,令

$$g(x)=\begin{cases}\mu((0,x]), & x\in(0,+\infty),\\ 0, & x=0,\\ -\mu((x,0]), & x\in(-\infty,0),\end{cases}$$

其余的详细论证留给读者完成.

定理 3.4.2 设$(\mathbf{R},\mathcal{L}_g,m_g)$为一测度空间,$E\subset\mathbf{R}$,则$E\in\mathcal{L}_g$的充要条件是下述之一成立:

(1) 对于任一$\varepsilon>0$,存在开集G,使得

$$E\subset G \text{ 且 } m_g^*(G\setminus E)<\varepsilon;$$

(2) 对于任一$\varepsilon>0$,存在闭集F,使得

$$F\subset E \text{ 且 } m_g^*(E\setminus F)<\varepsilon;$$

(3) 对于任一$\varepsilon>0$,存在闭集F与开集G,使得

$$F\subset E\subset G \text{ 且 } m_g(G\setminus F)<\varepsilon;$$

(4) 存在F_σ型集F与G_δ型集G,使得

$$F\subset E\subset G \text{ 且 } m_g(G\setminus F)=0.$$

(注意,当$E\in\mathcal{L}_g$时上述(1)、(2)中的外测度m_g^*就是测度m_g.)

证 我们只证明充要条件(1).其余留作练习.

必要性.设$E\in\mathcal{L}_g$且$m_g(E)<+\infty$,则对于任一$\varepsilon>0$,存在$E_n\in\mathbf{K}(\mathcal{F})$ $(n=1,2,\cdots)$使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\supset E,\ \sum_{n=1}^{\infty}m_g(E_n)<m_g(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意到$\mathbf{K}(\mathcal{F})$中的元素均可表为$\mathcal{F}$中有限个元素的并集,从而$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$必可表为可数个左开右闭的有界区间的并集,记之为$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]$,且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(g(b_k)-g(a_k))=\sum_{k=1}^{\infty}m_g((a_k,b_k])=\sum_{n=1}^{\infty}m_g(E_n).$$

于是有

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k]\supset E,\ \sum_{k=1}^{\infty}m_g((a_k,b_k])<m_g(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为右连续函数,因此存在$\delta_k>0$使得

$$g(b_k+\delta_k)<g(b_k)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\quad(k=1,2,\cdots),$$

即有

$$m_g((a_k,b_k+\delta_k))\leqslant m_g((a_k,b_k+\delta_k])<m_g((a_k,b_k])$$
$$+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\quad(k=1,2,\cdots).$$

现取 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k+\delta_k)$，则开集 $G\supset E$，且

$$m_g(G)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_g((a_k,b_k+\delta_k))\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m_g((a_k,b_k])+\frac{\varepsilon}{2}<m_g(E)+\varepsilon,$$

由此即得

$$m_g(G\setminus E)=m_g(G)-m_g(E)<\varepsilon.$$

若 $E\in\mathscr{L}_g$ 且 $m_g(E)=+\infty$，则令 $E^{(n)}=E\cap(-n,n]$，可知 $m_g(E^{(n)})<+\infty(n=1,2,\cdots)$. 由已证之结论，对于任一 $\varepsilon>0$，存在开集 $G^{(n)}\supset E^{(n)}$ 使得 $m_g(G^{(n)}\setminus E^{(n)})<\frac{\varepsilon}{2^n}(n=1,2,\cdots)$. 现令 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G^{(n)}$，则开集 $G\supset E$，且 $G\setminus E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G^{(n)}\setminus E^{(n)})$，于是

$$m_g(G\setminus E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m_g(G^{(n)}\setminus E^{(n)})<\varepsilon.$$

下证充分性. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 且满足条件(1)，则存在 $\mathbf{R}$ 上的开集 G_n 使得

$$G_n\supset E,m_g^*(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

取 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则 G_δ 型集 $G\in\mathscr{L}_g$，$G\supset E$，且

$$m_g^*(G\setminus E)\leqslant m_g^*(G_n\setminus E)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

即得 $m_g^*(G\setminus E)=0$，由此可知 $G\setminus E\in\mathscr{L}_g$（参见习题 3.6），从而 $E=G\setminus(G\setminus E)\in\mathscr{L}_g$.

推论　任何 L-S 可测集必是某个 F_σ 型集（或 G_δ 型集）与 L-S 零测集之并集（或相应之差集）.（试比较定理 3.3.4）.

习　题

1. 设 $\mathscr{A}$ 是集合 X 上的一个非空集族，证明：$\mathscr{A}$ 为代数的充要条件是若 $E,F\in\mathscr{A}$，则

E^c, $E\cap F\in\mathscr{A}$.

2. 设$\mathscr{A}$是集合 X 上的代数,证明:$\mathscr{A}$为 σ 代数的充要条件是若$E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$,且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$,则$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$.

3. 设$\mathscr{F}$是集合 X 上的一个非空集族,证明:

(1) $\mathbf{K}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小代数;

(2) $\mathbf{S}(\mathscr{F})$是包含$\mathscr{F}$的最小 σ 代数;

(3) $\mathbf{S}(\mathscr{F})=\mathbf{S}(\mathbf{K}(\mathscr{F}))$.

4. 证明定理 3.2.1 中的(6)~(10).

5. 设 μ^* 为 $\mathscr{P}(X)$上的外测度,$\mathscr{A}$为 X 上的代数,证明:若 μ^* 在$\mathscr{A}$上满足有限可加性,则 μ^*(在$\mathscr{A}$上的限制)为$\mathscr{A}$上的测度.

6. 设 μ^* 为$\mathscr{P}(X)$上的外测度,$\mathscr{A}^*$是由 C 外测度法所得的全体 μ^* 可测集,证明:对于任一 $E\in\mathscr{P}(X)$,若 $\mu^*(E)=0$,则 $E\in\mathscr{A}^*$.

7. 设μ^* 为$\mathscr{P}(X)$上的外测度,$\mathscr{A}^*$ 是由C外测度法所得的全体 μ^* 可测集,(E_n)为两两不交的 μ^* 可测集列,$F_n\subset E_n(n=1,2,\cdots)$,证明:$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(F_n)$.

8. 设$\mathscr{A}$为集合 X 上的代数,μ 为$\mathscr{A}$上的测度,μ^* 是由 μ 导出的$\mathscr{P}(X)$上的外测度,证明:

(1) 对于任一 $E\subset X$,存在 $B\in\mathbf{S}(\mathscr{A})$使得 $B\supset E$ 且$\mu^*(B)=\mu^*(E)$.

(2) 对于 X 上的任一单调增集列(E_n),均有$\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(\lim\limits_{n\to\infty}E_n)$.

9. 设$\mathscr{A}$为集合 X 上的代数,μ 为$\mathscr{A}$上的 σ 有限测度,μ^* 是由 μ 导出的$\mathscr{P}(X)$上的外测度,$E\subset X$ 且$\mu^*(E)>0$. 证明:对于任一 $\delta\in(0,1)$,存在 $A\in\mathscr{A}$,使得

$$\delta\cdot\mu(A)<\mu^*(A\cap E).$$

10. 设 $E\subset\mathbf{R}$,$x_0\in\mathbf{R}$,记

$$x_0+E:=\{x_0+x\mid x\in E\},$$

证明:$m^*(x_0+E)=m^*(E)$.(此结论即所谓 Lebesgue 外测度的平移不变性.)

11. 设 $x_0\in\mathbf{R}$,证明:$E\in\mathscr{L}\Leftrightarrow(x_0+E)\in\mathscr{L}$.

12. 证明:由 $\mathbf{R}$ 中的全体开集生成的 σ 代数$\mathscr{B}$与$\mathbf{S}(\mathscr{F})$一致.

13. 证明:任给 $\alpha\in[0,1)$,存在$[0,1]$中的无处稠密的完全集 E 使得$m(E)=\alpha$.

14. 证明:(1) $\mathbf{R}$ 上的 L 可测集全体所成之集族$\mathscr{L}$与$\mathscr{P}(\mathbf{R})$等势.

(2) $\mathbf{R}$ 上的 Borel 可测集全体所成之集族$\mathscr{B}$与 $\mathbf{R}$ 等势.(由此说明$\mathscr{L}\setminus\mathscr{B}\neq\varnothing$.)

15. 证明:$\mathbf{R}$ 上的 Borel 可测集必为 L-S 可测集.

16. 设$(\mathbf{R},\mathscr{L}_g,m_g)$为一测度空间,$E\subset\mathbf{R}$,证明:$E\in\mathscr{L}_g$ 的充要条件是下述之一成立:

(1) 对于任一 $\varepsilon>0$,存在闭集 F,使得 $F\subset E$ 且$m_g{}^*(E\setminus F)<\varepsilon$;

(2) 对于任一 $\varepsilon>0$,存在闭集 F 与开集G,使得 $F\subset E\subset G$ 且$m_g(G\setminus F)<\varepsilon$;

(3) 存在 F_σ 型集F 与G_δ 型集G,使得 $F\subset E\subset G$ 且$m_g(G\setminus F)=0$.

17. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为测度空间(其中$\mathscr{A}$为代数),μ^* 为由 μ 导出的外测度. 又设测度空

间$(X,\mathscr{A}_1,\mu^*)$为$(X,\mathscr{A},\mu)$的扩张，记μ^{**}为由μ^*(作为$\mathscr{A}_1$上的测度)导出的外测度，证明：$\mu^{**}=\mu^*$(此处的μ^*视作$\mathscr{P}(X)$上的外测度).

18. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为有限或σ有限测度空间，其中$\mathscr{A}$为σ代数，$(X,\mathscr{A}^*,\mu^*)$为由C外测度法所得的$(X,\mathscr{A},\mu)$的扩张.又记Ω为所有μ-零测集的全体子集所成之集族，令

$$\mathscr{A}\cup\Omega:=\{A\cup W\mid A\in\mathscr{A},W\in\Omega\},$$

且在$\mathscr{A}\cup\Omega$上定义集合函数ν：$\nu(A\cup W)=\mu(A)$. 证明：$(X,\mathscr{A}\cup\Omega,\nu)=(X,\mathscr{A}^*,\mu^*)$.

19. 设$\mathscr{A}$为集合X上的代数，$D\subset X$，令

$$\mathscr{A}\cap D:=\{A\cap D\mid A\in\mathscr{A}\}.$$

证明：(1) $\mathscr{A}\cap D$为D上的代数(若$\mathscr{A}$为σ代数，则$\mathscr{A}\cap D$也为σ代数)；

(2) $\mathbf{S}(\mathscr{A})\cap D=\mathbf{S}(\mathscr{A}\cap D)$；

(3) 若$D\in\mathscr{A}$，μ为$\mathscr{A}$上的测度，则μ在$\mathscr{A}\cap D$上的限制μ_D为$\mathscr{A}\cap D$上的测度；若记μ^*为由μ导出的$\mathscr{P}(X)$上的外测度，$\mu_D{}^*$为由μ_D导出的$\mathscr{P}(D)$上的外测度，则$\mu_D{}^*$为μ^*在$\mathscr{P}(D)$上的限制函数；

(4) 若μ^*为$\mathscr{P}(X)$上的外测度，$\mathscr{A}^*$为由C外测度法得到的μ^*可测集全体，$D\in\mathscr{A}^*$，记$\mu_D{}^*$为μ^*在$\mathscr{P}(D)$上的限制，$\mathscr{A}_D{}^*$为由C外测度法得到的$\mu_D{}^*$可测集全体，则$\mathscr{A}_D{}^*=\mathscr{A}^*\cap D$.

20. 设$\mathscr{A}$是X上的代数，μ为$\mathscr{A}$上的σ有限测度，则在$\mathbf{S}(\mathscr{A})$上存在且只存在一个测度μ^*使得$(X,\mathbf{S}(\mathscr{A}),\mu^*)$是$(X,\mathscr{A},\mu)$的扩张.

第四章　可测函数

§4.1　可测函数及其性质

定义 4.1.1　设$(X,\mathscr{A})$为一可测空间，$E\in\mathscr{A}$，$f:E\to\mathbf{R}^*$．若对于任一$a\in\mathbf{R}$，均有$f^{-1}((a,+\infty])\in\mathscr{A}$，则称$f$为$E$上的$\mathscr{A}$可测函数，或称$f$在$E$上$\mathscr{A}$可测，在不至于引起混淆的前提下，就称$f$在$E$上可测．

显然，若在$E\in\mathscr{A}$上$f(x)\equiv c_0(c_0\in\mathbf{R}^*)$，则$f$在$E$上可测．

习惯上，我们记$E(f>a):=f^{-1}((a,+\infty])$，至于记号$E(f\geqslant a)$，$E(f<a)$，$E(f\leqslant a)$的意义是自明的．

定理 4.1.1　设$(X,\mathscr{A})$为一可测空间，$E\in\mathscr{A}$，$f:E\to\mathbf{R}^*$，则下列四个命题等价：

(1) $\forall a\in\mathbf{R}:E(f>a)\in\mathscr{A}$;

(2) $\forall a\in\mathbf{R}:E(f\geqslant a)\in\mathscr{A}$;

(3) $\forall a\in\mathbf{R}:E(f<a)\in\mathscr{A}$;

(4) $\forall a\in\mathbf{R}:E(f\leqslant a)\in\mathscr{A}$.

证　(1)⇒(2)．注意到$\mathscr{A}$为σ代数，故由

$$E(f\geqslant a)=f^{-1}([a,+\infty])=f^{-1}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(a-\frac{1}{n},+\infty]\Big)$$

$$=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}((a-\frac{1}{n},+\infty])=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f>a-\frac{1}{n}),$$

即得所证．

(2)⇒(3)．同理，由$\mathscr{A}$为σ代数以及

$$E(f<a)=f^{-1}([-\infty,a))=f^{-1}([a,+\infty]^C)$$

$$=(f^{-1}([a,+\infty]))^C=(E(f\geqslant a))^C,$$

即得所证．

用类似的方法可以证明(3)⇒(4)⇒(1)，不再赘述．

定理 4.1.2　设$(X,\mathscr{A})$为一可测空间，$f:X\to\mathbf{R}^*$，则

(1)集族$\Omega:=\{B\mid B\subset\mathbf{R}^*,f^{-1}(B)\in\mathscr{A}\}$为$\mathbf{R}^*$上的$\sigma$代数；

(2)若f在X上可测，则$\Omega\supset\tau$(此处的τ表示$\mathbf{R}^*$上的全体开集)．由此

可知，f 在 X 上可测的充要条件是对于任一开集 $V\in\tau$，均有 $f^{-1}(V)\in\mathscr{A}$；

(3)若 f 在 X 上可测，则 $\Omega\supset\mathscr{B}$(此处的 $\mathscr{B}$ 表示 $\mathbf{R}^*$ 上全体 Borel 集)；

(4)若 g 在 $\mathbf{R}^*$ 上 Borel 可测，f 在 X 上可测，则 $g\circ f$ 在 X 上可测．

证 (1)若 $B\in\Omega$，则 $f^{-1}(B^C)=(f^{-1}(B))^C\in\mathscr{A}$，即 $B^C\in\Omega$；又若 $B_n\in\Omega$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(B_n)\in\mathscr{A}$，即 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\Omega$. 这就证明了(1).

(2)对于 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，有 $(a,b)=[-\infty,b)\cap(a,+\infty]$，于是由定理4.1.1(1)、(3)可知 $(a,b)\in\Omega$. 注意到 $\mathbf{R}^*$ 中的开集均为至多可数个诸如 $[-\infty,a)$，$(a,+\infty]$ 以及 (a,b) 这些类型区间的并集，由上述已证之(1)即得(2).

(3)注意到 $\mathscr{B}$ 是由 τ 生成的 σ 代数，而由上述(1)、(2)知 Ω 是包含 τ 的 σ 代数，由此即得(3).

(4)对于任一 $V\in\tau$，则 $g^{-1}(V)\in\mathscr{B}$，又由(3)知，$(g\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))\in\mathscr{A}$，于是由(2)即得(4).

推论1 设 (X,τ) 为一拓扑空间，$\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ 代数，且 $\mathscr{A}\supset\tau$，若 f: $X\to\mathbf{R}^*$ 连续，则 f 在 X 上(Borel)可测．

作为特例，若 $X=\mathbf{R}$，则 $\mathbf{R}$ 上的一切连续函数均为 $\mathbf{R}$ 上的 L 可测函数；$E(\in\mathscr{L})$ 上的一切连续函数均为 E 上的 L 可测函数．

推论2 设 $\mathscr{L}$ 为 $\mathbf{R}$ 上的 L 可测集全体，则 $\mathbf{R}$ 上的一切单调函数均为 $\mathbf{R}$ 上的 L 可测函数；$E(\in\mathscr{L})$ 上的一切单调函数均为 E 上的 L 可测函数．

引理1 (1)若 f 在 $E\in\mathscr{A}$ 上可测，则 f 在 E 的任一可测子集上可测；

(2)若 f 在 $E_i\in\mathscr{A}$ 上可测 $(i=1,\cdots,n)$，则 f 在 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 上可测．

由定义即知引理1成立，故证略．

引理2 设 f 和 g 都是 $E\in\mathscr{A}$ 上的可测函数，则 $E(f>g)\in\mathscr{A}$.

证 事实上，记 $\mathbf{Q}=\{r_n\}$，即有

$$E(f>g)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g<r_n))\in\mathscr{A}.$$

定理4.1.3 设 f 和 g 都是 $E\in\mathscr{A}$ 上的可测函数，记

$$E_0:=[E(f=+\infty)\cap E(g=-\infty)]\cup[E(f=-\infty)\cap E(g=+\infty)],$$

则下列函数均为 E 上的可测函数

(1) $cf:(cf)(x):=cf(x)\quad(c\in\mathbf{R}^*)$；

(2) $f+g:(f+g)(x):=\begin{cases}f(x)+g(x), & x\in E\setminus E_0,\\ c_0, & x\in E_0;\end{cases}$

(3)$\frac{1}{f}$:$\frac{1}{f}(x):=\begin{cases}\frac{1}{f(x)}, & \text{当 } f(x)\neq 0,\\ c_0, & \text{当 } f(x)=0;\end{cases}$

(4)$f\cdot g$:$(f\cdot g)(x):=f(x)g(x)$;

(5)$|f|^p$:$|f|^p(x):=|f(x)|^p \quad (p\in[0,+\infty))$.

证 (1)对于任一 $a\in\mathbf{R}$,首先,由 $E(-f>a)=E(f<-a)\in\mathscr{A}$,可知 $-f$ 在E 上可测.

其次,若 $c=0$,则 cf 在E 上恒为零,cf 在E 上显然可测.

若 $c\in(0,+\infty)$,则 $E(cf>a)=E\left(f>\frac{a}{c}\right)\in\mathscr{A}$;若 $c=+\infty$,则

$$(cf)(x)=\begin{cases}-\infty, & x\in E(f<0),\\ 0, & x\in E(f=0),\\ +\infty, & x\in E(f>0),\end{cases}$$

利用引理1(2)可知 cf 在E 上可测.从而,当 $c\in(0,+\infty]$时 cf 在E 上可测.

若 $c\in[-\infty,0)$,则由 $cf=-(-cf)$以及已证之结论可知 cf 在E 上可测.

(2)记

$$E_1=(E(f=+\infty)\cup E(g=+\infty))\setminus E_0,$$

$$E_2=(E(f=-\infty)\cup E(g=-\infty))\setminus E_0,$$

$$E_3=(E(-\infty<f<+\infty)\cap E(-\infty<g<+\infty)),$$

则易知 $E_k\in\mathscr{A}(k=0,1,2,3)$,且$\bigcup\limits_{k=0}^{3}E_k=E$.由于 $f+g$ 在E_0,E_1 与 E_2 上的取值分别为 c_0,$+\infty$与$-\infty$,因此 $f+g$ 在$E_k(k=0,1,2)$上可测.此外注意到,对于 $a,b\in\mathbf{R}$,由 $E_3(a-g>b)=E_3(g<a-b)$,应用引理1(1)可知 $a-g$ 在E_3 上可测;再由 $E_3(f+g>a)=E_3(f>a-g)$,应用引理1(1)以及引理2可知 $f+g$ 在E_3 上可测.从而,由引理1(2)即知 $f+g$ 在E 上可测.

(3)令

$$h(u)=\begin{cases}\frac{1}{u}, & u\in[-\infty,0)\cup(0,+\infty],\\ c_0, & u=0,\end{cases}$$

则 h 在 $\mathbf{R}^*$ 上显然 Borel 可测.于是,由定理4.1.2(4)可知$\frac{1}{f}=h\circ f$ 在E 上

可测．

(4)首先，令 $h(u)=u^2(u\in\mathbf{R}^*)$，与(3)的论证中的理由相同，可知 $f^2=h\circ f$ 在 E 上可测．其次，令

$$E_1=E(f=0)\cup E(g=0),$$

$$E_2=\{E(f=-\infty)\cap E(g>0)\}\cup\{E(f=+\infty)\cap E(g<0)\}$$
$$\cup\{E(f<0)\cap E(g=+\infty)\}\cup\{E(f>0)\cap E(g=-\infty)\},$$

$$E_3=\{E(f=+\infty)\cap E(g>0)\}\cup\{E(f=-\infty)\cap E(g<0)\}$$
$$\cup\{E(f>0)\cap E(g=+\infty)\}\cup\{E(f<0)\cap E(g=-\infty)\},$$

$$E_4=E(-\infty<f<+\infty)\cap E(-\infty<g<+\infty),$$

则易知 $E_k\in\mathscr{A}(k=1,2,3,4)$，且 $\bigcup_{k=1}^{4}E_k=E$．由于 $f+g$ 在 E_1,E_2 与 E_3 上的取值分别为 $0,-\infty$ 与 $+\infty$，因此 $f+g$ 在 $E_k(k=1,2,3)$ 上可测．此外注意到在 E_4 上成立

$$f\cdot g=\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2),$$

于是由引理 1(1)以及上述(1)、(2)与已证之结果可知 $f\cdot g$ 在 E_4 上可测．再应用引理 1(2)即知 $f\cdot g$ 在 E 上可测．

(5)注意到 $|f|^p=(f^2)^{\frac{p}{2}}$，应用上述(4)以及定理 4.1.2(4)即可证得．

定理 4.1.4 设(f_n)是 $E\in\mathscr{A}$ 上的可测函数列，则 $\sup\limits_{n\geq 1}f_n$，$\inf\limits_{n\geq 1}f_n$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty}f_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n$ 均为 E 上的可测函数，其中

$$(\sup_{n\geq 1}f_n)(x):=\sup_{n\geq 1}\{f_n(x)\},\ (\inf_{n\geq 1}f_n)(x):=\inf_{n\geq 1}\{f_n(x)\},$$
$$(\varlimsup_{n\to\infty}f_n)(x):=\varlimsup_{n\to\infty}\{f_n(x)\},\ (\varliminf_{n\to\infty}f_n)(x):=\varliminf_{n\to\infty}\{f_n(x)\}.$$

证 对于任一 $a\in\mathbf{R}$，注意到

$$E(\sup_{n\geq 1}f_n\leqslant a)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f_n\leqslant a)\in\mathscr{A},$$

$$\inf_{n\geq 1}f_n=-\sup_{n\geq 1}(-f_n),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}f_n=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n}f_k,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}f_n=-\varlimsup_{n\to\infty}(-f_n),$$

由此便可逐次推得上述四个函数均在 E 上可测．

推论 1 f 为$E\in\mathscr{A}$上的可测函数的充要条件是

$$f^{+}:=\max\{f,0\},f^{-}:=\max\{-f,0\}$$

均为 E 上的可测函数．(此处的 f^{+},f^{-} 分别称为 f 的正部和负部．)

推论 2 设(f_n)是 $E\in\mathscr{A}$ 上的可测函数列，且 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)(x\in E)$，则 f 为E 上的可测函数．

所谓 $E\in\mathscr{A}$ 上的可测函数 f 是一个简单函数，是指 $f(E)$是 $\mathbf{R}$ 中的有限集，即 $f(x)$只取有限个实值．显然，f 是E 上的简单函数的充要条件是存在有限个两两不交的可测集E_i 以及 $c_i\in\mathbf{R}(i=1,\cdots,n)$，使得 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ 且在E 上成立$f=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}$．

定理 4.1.5 设 f 为$E\in\mathscr{A}$上的可测函数，则存在 E 上的简单函数列(φ_n)满足

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x),|\varphi_n(x)|\uparrow|f(x)|,x\in E.$$

证 首先假设 f 为E 上的非负可测函数．令

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n},x\in E\left(\dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f<\dfrac{k}{2^n}\right),k=1,2,\cdots,n\cdot 2^n,\\ n,\quad x\in E(f\geqslant n),\end{cases}$$

$n=1,2,\cdots$，则易知(φ_n)为 E 上的非负简单函数的不减序列．下证 $\varphi_n(x)\uparrow f(x)(x\in E)$.

若 $x\in E(f=+\infty)$，则 $x\in E(f\geqslant n)(n=1,2,\cdots)$，于是

$$\varphi_n(x)=n\uparrow+\infty=f(x).$$

若 $x\in E(0\leqslant f<+\infty)$，则对于任一 $n\in\mathbf{N}$，当 $n>f(x)$时，必存在$k\in\{1,2,\cdots,n\cdot2^n\}$使得$\dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f(x)<\dfrac{k}{2^n}$，即

$$x\in E\left(\frac{k-1}{2^n}\leqslant f<\frac{k}{2^n}\right),$$

此时 $\varphi_n(x)=\dfrac{k-1}{2^n}$，于是

$$0\leqslant f(x)-\varphi_n(x)<\frac{1}{2^n},n=[f(x)]+1,[f(x)]+2,\cdots,$$

由此即知 $\varphi_n(x)\uparrow f(x)$.

其次讨论 f 为 E 上的一般可测函数的情形．此时，$f=f^+-f^-$．由定理4.1.4推论1，f^+ 与 f^- 均为 E 上的非负可测函数，于是由已证之结论知，存在 E 上非负简单函数的不减序列 (g_n) 与 (h_n) 使得

$$g_n(x)\uparrow f^+(x),h_n(x)\uparrow f^-(x),x\in E.$$

令

$$\varphi_n=g_n-h_n(n=1,2,\cdots),$$

则 (φ_n) 显然为简单函数列，且易知 $|\varphi_n|=g_n+h_n$，于是有

$$|\varphi_n(x)|=g_n(x)+h_n(x)\uparrow f^+(x)+f^-(x)=|f(x)|,$$

$$\varphi_n(x)=g_n(x)-h_n(x)\to f^+(x)-f^-(x)=f(x),x\in E.$$

至此定理证毕．

推论1 设 f 为 E 上的有界可测函数，则存在一致有界简单函数列 (φ_n) 在 E 上一致收敛于 f.

推论2 f 为 E 上可测函数的充要条件是 f 可表为 E 上的简单函数列的极限．

§4.2 可测函数列

设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为一测度空间（其中 $\mathscr{A}$ 为 X 上的 σ 代数），$E\subset X$，若存在零测集 E_0 使得某一命题或条件在 $E\setminus E_0$ 上成立，则称该命题或条件在 E 上几乎处处成立．例如：

1° 若 $E(|f|<+\infty)\supset E\setminus E_0$，则称 f 在 E 上几乎处处有限，简称 f 在 E 上 a.e. 有限，记为"$|f(x)|<+\infty$ a.e. 于 E"；

2° 若 $E(f=g)\supset E\setminus E_0$，则称 f 和 g 在 E 上几乎处处相等，简称 f 和 g 在 E 上 a.e. 相等，记为"$f(x)=g(x)$ a.e. 于 E"；

3° 若 $E(f_n\to f)\supset E\setminus E_0$，则称 (f_n) 在 E 上几乎处处收敛于 f，简称 (f_n) 在 E 上 a.e. 收敛于 f，记为"$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 于 E"或"$f_n(x)\to f(x)$ a.e. 于 E"；

4° 若 $E\in\mathscr{A}$，$f,f_n(n=1,2,\cdots)$ 为 E 上可测函数，且规定 $(f_n-f)(x)=0\Leftrightarrow f_n(x)=f(x)$，若对任一 $\sigma>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=0,$$

则称(f_n)在E上依测度收敛于f，记为“$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E”或“$f_n(x)\xrightarrow{\mu} f(x)$于$E$”.

定理 4.2.1 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，(f_n)为$E\in\mathscr{A}$上的可测函数列，若E上的函数f为(f_n)的 a.e. 收敛的极限函数，则存在E上的可测函数g，使得$f(x)=g(x)$ a.e. 于E.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a.e. 于E，而$E\in\mathscr{A}$，所以存在零测集$E_0\subset E$使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),x\in E\setminus E_0.$$

现令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus E_0,\\ 0, & x\in E_0,\end{cases}$$

则$f(x)=g(x)$ a.e. 于E，且g分别在E_0，$E\setminus E_0\in\mathscr{A}$上可测，而$E=(E\setminus E_0)\cup E_0$，于是$g$在$E$上可测.

推论 若$(X,\mathscr{A},\mu)$为一完备测度空间，则$E\in\mathscr{A}$上的可测函数列的 a.e. 收敛的极限函数必为E上的可测函数.

定理 4.2.2 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，$f,g,f_n(n=1,2,\cdots)$为$E\in\mathscr{A}$上的可测函数，且$f_n(x)\Rightarrow f(x)$，$f_n(x)\Rightarrow g(x)$于E，则$f(x)=g(x)$ a.e. 于E.

证 注意到此时规定$(f-g)(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$，则由

$$|(f-g)(x)|\leqslant|(f_n-f)(x)|+|(g_n-f)(x)|,x\in E,$$

可知

$$E\left(|f-g|\geqslant\frac{1}{k}\right)\subset E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2k}\right)\cup E\left(|f_n-g|\geqslant\frac{1}{2k}\right)\quad(k=1,2,\cdots),$$

因此

$$\mu\left(E\left(|f-g|\geqslant\frac{1}{k}\right)\right)\leqslant\mu\left(E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{2k}\right)\right)+\mu\left(E\left(|f_n-g|\geqslant\frac{1}{2k}\right)\right)\quad(k=1,2,\cdots).$$

因为$f_n(x)\Rightarrow f(x)$，$f_n(x)\Rightarrow g(x)$于E，对上式令$n\to\infty$，得

$$\mu\left(E\left(|f-g|\geqslant \frac{1}{k}\right)\right)=0 \quad (k=1,2,\cdots).$$

注意到

$$E(f\neq g)=\bigcup_{k=1}^{\infty}E\left(|f-g|\geqslant \frac{1}{k}\right),$$

由此即知 $\mu(E(f\neq g))=0$,亦即证明了 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E.

引理 设函数列(f_n)在集合 E 上收敛于有限函数f,则对于任一 $\sigma>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=\varnothing.$$

证 由假定,任取 $x\in E$,对于任一 $\sigma>0$,存在 $k=k(x,\sigma)\in\mathbf{N}$ 使得

$$|f_n(x)-f(x)|<\sigma, n=k,k+1,\cdots,$$

即

$$x\in\bigcap_{n=k}^{\infty}E(|f_n-f|<\sigma),$$

从而

$$x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}E(|f_n-f|<\sigma)=\underline{\lim_{n\to\infty}}E(|f_n-f|<\sigma),$$

此即说明 $E\subset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E(|f_n-f|<\sigma)$. 又,$E\supset\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}E(|f_n-f|<\sigma)$恒成立 . 因此

$$E=\underline{\lim_{n\to\infty}}E(|f_n-f|<\sigma),$$

进而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=E\setminus\underline{\lim_{n\to\infty}}E(|f_n-f|<\sigma)=\varnothing,$$

从而得到$\lim\limits_{n\to\infty}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=\varnothing$.

注 由上述证明中得到的"$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=\varnothing$"其等价形式为

$$\lim_{k\to\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=\varnothing.$$

定理 4.2.3(Lebesgue) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,$\mu(E)<+\infty$,(f_n)为 E 上的可测函数列,且(f_n)在 E 上 a.e. 收敛于 a.e. 有限的可测函数 f,则(f_n)在 E 上依测度收敛于f.

证 令

$$E_1 := E(|f|<+\infty)\cap E(f_n\to f),$$

则 $E_1, E\setminus E_1\in\mathscr{A}$, $\mu(E\setminus E_1)=0$. 注意到, f 在 E_1 上取值有限, 且对于任一 $\sigma>0$ 有

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma)\Big)\leqslant\mu(E_1)=\mu(E)<+\infty,$$

则由引理以及测度的连续性推得

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma))=\mu(\varnothing)=0,$$

于是

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))\leqslant\lim_{n\to\infty}\mu(E_1(|f_n-f|\geqslant\sigma))+\mu(E\setminus E_1)=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\mu(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=0,$$

即得所证.

定理 4.2.4(Егоров) 设 $(X,\mathscr{A},\mu)$ 为一测度空间, $E\in\mathscr{A}$, $\mu(E)<+\infty$, (f_n) 为 E 上的可测函数列, 且 (f_n) 在 E 上 a.e. 收敛于 a.e. 有限的可测函数 f, 则对任一 $\delta>0$, 存在 $E_\delta\in\mathscr{A}$, 使得 $\mu(E\setminus E_\delta)<\delta$ 且 (f_n) 在 E_δ 上一致收敛于 f.

证 令

$$E_1 := E(|f|<+\infty)\cap E(f_n\to f),$$

则 $E_1, E\setminus E_1\in\mathscr{A}$, $\mu(E\setminus E_1)=0$. 注意到 $\mu(E_1)\leqslant\mu(E)<+\infty$ 且 f 在 E_1 上取值有限, 则由上述引理以及测度的上半连续性推得

$$\lim_{k\to\infty}\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}E_1\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{j}\right)\right)=0\quad(j=1,2,\cdots).$$

于是对于任一 $\delta>0$, 存在 $n_j\in\mathbf{N}$ 使得

$$\mu\left(\bigcup_{n=n_j}^{\infty}E_1\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{j}\right)\right)<\frac{\delta}{2^j}\quad(j=1,2,\cdots),$$

其中 $n_j<n_{j+1}$ $(j=1,2,\cdots)$. 进而得

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=n_j}^{\infty}E_1\left(|f_n-f|\geqslant\frac{1}{j}\right)\right)<\delta.$$

现令

$$E_\delta := E_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{n=n_j}^{\infty} E_1\left(|f_n - f| \geqslant \frac{1}{j}\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_j}^{\infty} E_1\left(|f_n - f| < \frac{1}{j}\right),$$

则 $E_\delta \in \mathscr{A}$ 即为所求．事实上，

$$\mu(E \setminus E_\delta) = \mu(E_1 \setminus E_\delta) + \mu(E \setminus E_1) < \delta,$$

且对于任一 $\varepsilon > 0$，存在 $j \in \mathbf{N}$ 使得 $\frac{1}{j} < \varepsilon$，对此 j 存在 $n_j \in \mathbf{N}$，当 $n \geqslant n_j$ 时，对任一 $x \in E_\delta$ 均有 $x \in \bigcap_{n=n_j}^{\infty} E_1\left(|f_n - f| < \frac{1}{j}\right)$，即

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} < \varepsilon,$$

这就说明 (f_n) 在 E_δ 上一致收敛于 f. 证毕．

定理 4.2.5(Riesz) 设 $(X, \mathscr{A}, \mu)$ 为一测度空间，$E \in \mathscr{A}$，$f, f_n (n = 1, 2, \cdots)$ 为 E 上的可测函数，且 (f_n) 在 E 上依测度收敛于 f，则存在子列 (f_{n_j}) 在 E 上 a.e. 收敛于 f.

证 因为 $f_n \Rightarrow f$ 于 E，所以对于任一 $j \in \mathbf{N}$，存在 $n_j \in \mathbf{N}(n_j < n_{j+1})$ 使得

$$\mu\left(E\left(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\right)\right) < \frac{1}{2^j}.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(E\left(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\right)\right) < +\infty$，于是由测度的性质(定理 3.2.1 (10))得

$$\mu\left(\varlimsup_{j \to \infty} E\left(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\right)\right) = 0.$$

令

$$E_0 := \varlimsup_{j \to \infty} E\left(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\right),$$

则

$$E \setminus E_0 = \varliminf_{j \to \infty} E\left(|f_{n_j} - f| < \frac{1}{j}\right),$$

且易知 (f_{n_j}) 在 $E \setminus E_0$ 上收敛于 f. 事实上，对于任一 $x \in E \setminus E_0$，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $j \geqslant N$ 时有 $x \in E\left(|f_{n_j} - f| < \frac{1}{j}\right)$，即

$$\left|(f_{n_j}-f)(x)\right|<\frac{1}{j}\to 0\quad(j\to\infty).$$

证毕.

注 以下各例分别说明上述 Lebesgue 定理与 Егоров 定理中的有关条件的作用. 我们均在测度空间$(\mathbf{R},\mathcal{L},m)$中说明.

(1) Lebesgue 定理中的条件"f 为 a.e. 有限"的作用.

设 $E=(0,1]$, $f_n=n\chi_{(1/n,1]}$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=+\infty(x\in E)$, 且对于任一 $\sigma>0$ 有

$$m(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=m(E)=1\quad(n=1,2,\cdots).$$

(2) Lebesgue 定理中的条件"$m(E)<+\infty$"的作用.

设 $E=[0,+\infty)$, $f_n=\chi_{[0,n]}$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1(x\in E)$, 且对于任一 $\sigma\in(0,1)$有

$$m(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=m((n,+\infty))=+\infty\quad(n=1,2,\cdots).$$

(3) Егоров 定理中的条件"$m(E)<+\infty$"的作用.

设 $E=[0,+\infty)$, $f_n=\chi_{[0,n]}$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1(x\in E)$. 注意到, 对于任一 $E_\delta\subset E$, 若 $m(E\setminus E_\delta)<+\infty$, 则 E_δ 必为E 中的无界集, 于是存在 $x_n\in E_\sigma\cap(n,+\infty)$使得 $f_n(x_n)=0(n=1,2,\cdots)$, 此即说明(f_n)在 E_δ 上不一致收敛.

(4) Егоров 定理中的条件"$m(E\setminus E_\delta)<\delta$"不能改为"$m(E\setminus E_\delta)=0$".

设 $E=(0,1)$, $f_n(x)=x^n$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0(x\in E)$. 注意到, 对于任一 $E_\delta\subset E$, 若 $m(E\setminus E_\delta)=0$, 则 $\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}},1\right)\cap E_\delta\neq\varnothing$, 于是存在 $x_n\in\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}},1\right)\cap E_\delta$, 从而 $f_n(x_n)>\frac{1}{2}(n=1,2,\cdots)$, 此即说明$(f_n)$在 E_δ 上不一致收敛.

§4.3 L-S 可测函数与连续函数的关系

定理 4.3.1(Лузин) 设 f 为L-S 可测集E 上的 a.e. 有限的 L-S 可测函数, 则对于任一 $\delta>0$, 存在闭集 $E_\delta\subset E$ 使得 $m_g(E\setminus E_\delta)<\delta$ 且f 在E_δ 上的限制是有限值连续函数.

注 有时, 我们将定理结论中的"f 在E_δ 上的限制是连续函数"也说成是

“f 是 E_δ 上的连续函数”,注意它与所谓“f 在 E_δ 上连续”的区别．

证 首先,不妨假定 f 为 E 上的有限可测函数．这是由于 $m_g(E_0):=m_g(E(|f|=+\infty))=0$,记 $E_1=E\setminus E_0$,若闭集 $E_\delta\subset E_1$ 满足 $m_g(E_1\setminus E_\delta)<\delta$,则

$$m_g(E\setminus E_\delta)=m_g(E_1\setminus E_\delta)+m_g(E_0)<\delta,$$

复记 E_1 为 E 即可．进而,由于在变换 $g(x)=\arctan(f(x))$ 下,f 与 g 具有相同的可测性与连续性,因此可以进一步假定 f 为 E 上的有界可测函数．以下分两步证明本定理．

(1)设 f 为 E 上的简单函数,则可记

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{E_j}(x),x\in E,$$

其中 $\{E_j\mid 1\leqslant j\leqslant n\}$ 为 E 中两两不交的可测子集所成之集族,$\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j=E$,$\alpha_j\in\mathbf{R}(1\leqslant j\leqslant n)$.

由 L-S 可测集与闭集的关系可知,对于任一 $\delta>0$,存在闭集 $F_j\subset E_j$ 使得

$$m_g(E_j\setminus F_j)<\frac{\delta}{n}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

记 $E_\delta=\bigcup\limits_{j=1}^{n}F_j$,则 E_δ 为 E 的闭子集,且

$$m_g(E\setminus E_\delta)=m_g(\bigcup_{j=1}^{n}(E_j\setminus F_j))=\sum_{j=1}^{n}m_g(E_j\setminus F_j)<\delta.$$

下证 f 是 E_δ 上的连续函数．任取 $x_0\in E_\delta$,注意到 F_j 为两两不交的闭集,则存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $x_0\in F_j$,且当 $i\neq j$ 时 $x_0\notin F_i$,由此可知,对于 E_δ 中任一收敛于 x_0 的点列 (x_k),存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $k>N$ 时有 $x_k\in F_j$,于是由 f 的定义有

$$|f(x_k)-f(x_0)|=|\alpha_j-\alpha_j|=0,k>N,$$

从而 f 在 E_δ 上的限制函数在 x_0 点连续．由 $x_0\in E_\delta$ 的任意性,即证得 f 在 E_δ 上的限制是连续函数．

(2)设 f 为 E 上的有界可测函数．由有界可测函数与简单函数列的关系(定理 4.1.5 推论 1)可知,存在一致有界简单函数列 (φ_n) 在 E 上一致收敛于 f. 由上述已证之(1)知,对于任一 $\delta>0$,存在闭集 $E^{(n)}\subset E$ 使得 $m_g(E\setminus$

$E^{(n)})<\frac{\delta}{2^n}$,且 φ_n 为$E^{(n)}$上的连续函数($n=1,2,\cdots$). 现令 $E_\delta:=\bigcap_{n=1}^{\infty}E^{(n)}$,则 E_δ 为E 的闭子集,且

$$m_g(E\setminus E_\delta)=m_g(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\setminus E^{(n)}))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m_g(E\setminus E^{(n)})<\delta.$$

注意到 $E_\delta\subset E^{(n)}(n=1,2,\cdots)$,因此$(\varphi_n)$显然为 E_δ 上的一致有界连续函数列,且在 E_δ 上一致收敛于f,由此即知 f 在E_δ 上的限制为有界连续函数.

至此定理证毕.

定理 4.3.2(Лузин) 设 f 为L-S 可测集E 上的 a.e.有限的 L-S 可测函数,则对于任一 $\delta>0$,存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 φ 使得

$$m_g(E(f\neq\varphi))<\delta,\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

若 E 为有界集,则可使上述的 φ 具有紧支集(即 $\text{supp}\{\varphi\}:=\{x\mid\varphi(x)\neq0\}^-$ 为紧集).

证 由定理 4.3.1 知,对于任一 $\delta>0$,存在闭集 $E_\delta\subset E$ 使得 $m_g(E\setminus E_\delta)<\delta$ 且f 在E_δ 上的限制是有限值连续函数. 又由连续函数的延拓定理(定理 2.3.3)可知,存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 φ 使得

$$\varphi(x)=f(x),x\in E_\delta,$$

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi(x)|=\sup_{x\in E_\delta}|f(x)|\leqslant\sup_{x\in E}|f(x)|.$$

由此可知 $E(f\neq\varphi)$为 $E\setminus E_\delta$ 的可测子集,因此

$$m_g(E(f\neq\varphi))\leqslant m_g(E\setminus E_\delta)<\delta.$$

若 E 为 $\mathbf{R}$ 中的有界集,则存在 $r>0$ 使得 $E\subset(-r,r)$. 注意到 $F=(-\infty,-r]\cup[r,+\infty)$为 $\mathbf{R}$ 中闭集,且 $E_\delta\cap F=\varnothing$,于是由定理 2.3.3 前的引理知,存在连续函数 $\psi:\mathbf{R}\to[0,1]$使得 $\psi(F)=\{0\},\psi(E_\delta)=\{1\}$. 将上述证得的 $\varphi(x)$替换为 $\varphi(x)\cdot\psi(x)$即得所求.

推论 设 f 为L-S 可测集E 上的 a.e.有限的 L-S 可测函数,则存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数列(φ_n)在 E 上几乎处处收敛于f.

习 题

1. 设$(X,\mathscr{A})$为一可测空间,$E\in\mathscr{A}$,证明:f 为E 上的 $\mathscr{A}$可测函数的充要条件是对于任一 $r\in\mathbf{Q}$ 均有 $E(f>r)\in\mathscr{A}$.

2. 设$(X,\mathscr{A})$为一可测空间,(f_n)为 $E\in\mathscr{A}$上的可测函数列,证明:(f_n)的收敛点集与

发散点集均为可测集.

3. 设(X,τ)为一拓扑空间,$\mathscr{A}$为X上的σ代数,且$\mathscr{A}\supset\tau$,证明:X上的连续函数必为X上的$\mathscr{A}$可测函数.

4. 证明:$L\text{-}S$可测集E上的单调函数必为E上的$L\text{-}S$可测函数.

5. 设f为可测集E上的有界可测函数,证明:存在一致有界简单函数列(φ_n)在E上一致收敛于f.

6. 设(f_n)为完备测度空间中的可测集E上的可测函数列,$f:E\to\mathbf{R}^*$为(f_n)的a.e.收敛的极限函数,证明:f为E上的可测函数.

7. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,$f,f_n(n=1,2,\cdots)$为E上的可测函数,若对任一$\delta>0$,存在$E_\delta\in\mathscr{A}$使得$\mu(E-E_\delta)<\delta$且(f_n)在E_δ上一致收敛于f,证明:

(1)(f_n)在E上依测度收敛于f;

(2)(f_n)在E上a.e.收敛于f.

8. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E,$g:E\to\mathbf{R}^*$,证明:若$f_n(x)\leqslant g(x)$ a.e.于$E(n=1,2,\cdots)$,则$f(x)\leqslant g(x)$ a.e.于E.

9. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ a.e.于$E(n=1,2,\cdots)$,且$f_n(x)\Rightarrow f(x)$于E,证明:$f_n(x)\to f(x)$ a.e.于E.

10. 设f为$L\text{-}S$可测集E上的a.e.有限的$L\text{-}S$可测函数,证明:存在$\mathbf{R}$上的连续函数列(φ_n)在E上几乎处处收敛于f.

11. 设f为$L\text{-}S$可测集E上的a.e.有限的函数.证明:若对于任一$\delta>0$,存在闭集$E_\delta\subset E$使得$m_g(E\setminus E_\delta)<\delta$且$f$在$E_\delta$上的限制是有限值连续函数,则$f$为$E$上的$L\text{-}S$可测函数.

12. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,$f,g,f_n,g_n(n=1,2,\cdots)$均为$E$上a.e.有限的可测函数,且$f_n(x)\Rightarrow f(x)$,$g_n(x)\Rightarrow g(x)$于$E$.证明:在$E$上成立

(1)$|f_n(x)|\Rightarrow|f(x)|$;

(2)$\forall\alpha\in\mathbf{R}$:$\alpha f_n(x)\Rightarrow\alpha f(x)$;

(3)$(f_n+g_n)(x)\Rightarrow(f+g)(x)$;

(4)$\min\{f_n(x),g_n(x)\}\Rightarrow\min\{f(x),g(x)\}$;

$\max\{f_n(x),g_n(x)\}\Rightarrow\max\{f(x),g(x)\}$;

(5)若又设$\mu(E)<+\infty$,则$f_n(x)g_n(x)\Rightarrow f(x)g(x)$.

第五章　积　　分

§5.1　可测函数的积分

5.1.1　非负简单函数的积分

定义 5.1.1　设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$f=\sum_{k}^{n}\alpha_k\chi_{E_k}$为$X$上的非负简单函数(其中$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$,$X=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$,$\alpha_k\in[0,+\infty)$),则定义$f$在$E(\in\mathscr{A})$上的积分为

$$\int_E f\mathrm{d}\mu:=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu(E\cap E_k).$$

当$\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty$时,则称$f$在$E$上(关于测度$\mu$)可积.

由定义可知,若$\mu(E)=0$(不排除$E=\varnothing$的情形),则$\int_E f\mathrm{d}\mu=0$.

定理 5.1.1　设f,g均为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的非负简单函数,$E\in\mathscr{A}$.

(1)若$f(x)=g(x)$,$x\in E$,则$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$;

(2)$\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu$;

(3)$\int_E cf\mathrm{d}\mu=c\int_E f\mathrm{d}\mu$,其中$c\in[0,+\infty)$;

(4)$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu$.

证　设

$$f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{A_i},\quad g=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{B_j},$$

其中$A_i\in\mathscr{A}(i=1,2,\cdots,n)$两两不交,$B_j\in\mathscr{A}(j=1,2,\cdots,m)$两两不交,$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{j=1}^{m}B_j=X$.

(1)注意到,由假定,当$x\in E\cap A_i\cap B_j$时有$f(x)=g(x)$,可知,若$E\cap A_i\cap B_j\neq\varnothing$,则$\alpha_i=\beta_j$,此时

$$\alpha_i\mu(E\cap A_i\cap B_j)=\beta_j\mu(E\cap B_j\cap A_i);$$

而当 $E\cap A_i\cap B_j=\varnothing$ 时,上式显然成立．于是,

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu&=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E\cap A_i)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\alpha_i\mu(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n\beta_j\mu(E\cap B_j\cap A_i)\\&=\sum_{j=1}^m\beta_j\mu(E\cap B_j)=\int_E g\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(注:所证之结论说明,定义 5.1.1 中由算式定义的 f 在 E 上的积分值与 f 的具体表达形式无关．)

(2)易知,

$$f+g=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m(\alpha_i+\beta_j)\chi_{A_i\cap B_j},$$

于是

$$\begin{aligned}\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m(\alpha_i+\beta_j)\mu(E\cap A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\alpha_i\mu(E\cap A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n\beta_j\mu(E\cap B_j\cap A_i)\\&=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E\cap A_i)+\sum_{j=1}^m\beta_j\mu(E\cap B_j)\\&=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(3)显然,

$$cf=\sum_{i=1}^n c\alpha_i\chi_{A_i},$$

于是

$$\int_E cf\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n c\alpha_i\mu(E\cap A_i)=c\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(E\cap A_i)=c\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

(4)易知,

$$h := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E \cap A_i} + 0 \cdot \chi_{E^c} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E \cap A_i} = f\chi_E,$$

于是

$$\int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu = \int_X h \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i) + 0 \cdot \mu(E^c)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i) = \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

5.1.2 非负可测函数的积分

定义 5.1.2 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$\mathscr{A}$为 X 上的σ代数,f 为X上的非负可测函数．记

$$\mathscr{C}_f := \{\varphi \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \text{ 为简单函数}\},$$

定义 f 在$E(\in \mathscr{A})$上的积分为

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_E \varphi \mathrm{d}\mu \mid \varphi \in \mathscr{C}_f\right\}.$$

特别当$\int_E f \mathrm{d}\mu < +\infty$时,则称 f 在E 上(关于测度 μ)可积．

注 由定义即知,

1° 对于非负可测函数 f,恒有$\int_E f \mathrm{d}\mu \geqslant 0$.

2° 若 $\mu(E)=0$(不排除 $E=\varnothing$的情形),则$\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$.

3° 若 $f(x)=+\infty(x\in E)$,则$\int_E f \mathrm{d}\mu = (+\infty)\mu(E)$;进而,若非负可测函数 f 有类似于简单函数的表示,即 $f=\sum_{k}^{n}\alpha_k \chi_{E_k}$,其中 $\alpha_k \in [0,+\infty](k=1,2,\cdots,n)$,则也成立

$$\int_E f \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap E_k).$$

定理 5.1.2 设 f,g 均为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的非负可测函数．

(1)若 $f\leqslant g$,则$\int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g \mathrm{d}\mu (E\in \mathscr{A})$;

(2)若 $A,B\in \mathscr{A}, A\subset B$,则$\int_A f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_B f \mathrm{d}\mu$;

(3)若 f 在 $E\in\mathscr{A}$ 上可积,则 f 在 E 上 a.e. 有限.

证 (1)因为 $f\leqslant g$,所以 $\mathscr{C}_f\subset\mathscr{C}_g$,于是

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\sup_{\varphi\in\mathscr{C}_f}\int_E\varphi\mathrm{d}\mu\leqslant\sup_{\varphi\in\mathscr{C}_g}\int_E\varphi\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu.$$

(2)因为 $A\subset B$,所以对于任一非负简单函数 $\varphi=\sum_{i=1}^n\alpha_i\chi_{E_i}$,有

$$\int_A\varphi\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(A\cap E_i)\leqslant\sum_{i=1}^n\alpha_i\mu(B\cap E_i)=\int_B\varphi\mathrm{d}\mu,$$

于是

$$\int_A\varphi\mathrm{d}\mu=\sup_{\varphi\in\mathscr{C}_f}\int_A\varphi\mathrm{d}\mu\leqslant\sup_{\varphi\in\mathscr{C}_f}\int_B\varphi\mathrm{d}\mu=\int_B f\mathrm{d}\mu.$$

(3)令

$$E_0:=E(f=+\infty),h:=0\cdot\chi_{E_0^c}+(+\infty)\cdot\chi_{E_0},$$

则 h 为 X 上的非负可测函数,且 $h\leqslant f$,于是,由(1)及定义 5.1.2 后的注 3°,且注意到 f 在 $E\in\mathscr{A}$ 上可积,我们有

$$\begin{aligned}(+\infty)\cdot\mu(E_0)&=0\cdot\mu(E\cap E_0^c)+(+\infty)\cdot\mu(E_0)\\&=\int_E h\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu<+\infty,\end{aligned}$$

由此推得 $\mu(E_0)=0$,此即说明 f 在 E 上 a.e. 有限.

定理 5.1.3(Levi) 设(f_n)为$(X,\mathscr{A},\mu)$上非负可测函数的不减序列,则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E(\lim_{n\to\infty}f_n)\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

证 由条件可知,存在 X 上的非负可测函数 f: $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)(x\in X)$,且 $f_n\leqslant f_{n+1}\leqslant f(n=1,2,\cdots)$,于是由定理 5.1.2(1),有

$$\int_E f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E f_{n+1}\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu\quad(n=1,2,\cdots).$$

令 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu$,则 $\alpha\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu$.

另一方面,任取 $\varphi\in\mathscr{C}_f$ 以及 $c\in(0,1)$,令

$$E_n = E(f_n \geqslant c\varphi) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则 E_n 为 E 的可测子集．注意到 $E = E(f > c\varphi)$，于是 $E_n \uparrow E$. 记 $\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$（其中 $A_k \in \mathscr{A}$ 且两两不交），则有

$$\int_E f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_{E_n} c\varphi \mathrm{d}\mu = c\int_{E_n} \varphi \mathrm{d}\mu = c\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(E_n \cap A_k).$$

对上式两端令 $n \to \infty$，由 $E_n \cap A_k \uparrow E \cap A_k (k=1,2,\cdots,m)$ 以及测度的下半连续性推得

$$\alpha \geqslant c\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(E \cap A_k) = c\int_E \varphi \mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

由 $c \in (0,1)$ 的任意性可知 $\alpha \geqslant \int_E \varphi \mathrm{d}\mu$，又由 $\varphi \in \mathscr{E}_f$ 的任意性得 $\alpha \geqslant \int_E f \mathrm{d}\mu$.

至此定理证毕．

注 若 f 为 X 上的非负可测函数，则存在非负简单函数的不减序列 (φ_n)，使得 $\varphi_n(x) \uparrow f(x)(x \in X)$，于是由 Levi 定理，

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu, E \in \mathscr{A}.$$

注 如果将上式右端的极限作为非负可测函数积分的定义，那么必须说明：若非负简单函数的不减序列 (ψ_n) 也满足 $\psi_n(x) \uparrow f(x)(x \in X)$，则

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n \mathrm{d}\mu (E \in \mathscr{A}).$$

推论 若 f, g 为 X 上的非负可测函数，则对任一 $E \in \mathscr{A}$，有

(1) $\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu + \int_E g \mathrm{d}\mu$;

(2) $\int_E cf \mathrm{d}\mu = c\int_E f \mathrm{d}\mu$，其中 $c \in [0, +\infty)$;

(3) $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu$.

证 (1)若 $\int_E f \mathrm{d}\mu$ 与 $\int_E g \mathrm{d}\mu$ 中有一个为 $+\infty$，由于 $f+g \geqslant f \geqslant 0$，$f+g \geqslant g \geqslant 0$，则由定理 5.1.2(1)可知 $\int_E (f+g)\mathrm{d}\mu = +\infty$，故(1)中等式成立．

现设 $\int_E f \mathrm{d}\mu$ 与 $\int_E g \mathrm{d}\mu$ 均小于 $+\infty$. 由非负可测函数与简单函数列的关

系知，存在非负简单函数的不减序列(φ_n)与(ψ_n)，使得

$$\varphi_n(x)\uparrow f(x),\psi_n(x)\uparrow g(x)(x\in X),$$

注意到$(\varphi_n+\psi_n)$仍然是非负简单函数的不减序列，且

$$(\varphi_n+\psi_n)(x)\uparrow(f+g)(x)(x\in X),$$

由 Levi 定理以及定理 5.1.1(2)，有

$$\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E(\varphi_n+\psi_n)\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\left(\int_E\varphi_n\mathrm{d}\mu+\int_E\psi_n\mathrm{d}\mu\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n\mathrm{d}\mu+\lim_{n\to\infty}\int_E\psi_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu.$$

(2)可用类似的方法证明，留给读者完成．

(3)利用上述(1)的论证中的记号，由定理 5.1.1(4)以及 Levi 定理，可得

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E\varphi_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X\varphi_n\chi_E\mathrm{d}\mu=\int_X(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\chi_E)\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu.$$

注 由上述推论(3)可知：

1° 若 X 上的两个非负可测函数 f 与 g 在某一 $E\in\mathscr{A}$ 上成立 $f(x)\leqslant g(x)$，则在 X 上成立$(f\chi_E)(x)\leqslant(g\chi_E)(x)$，于是有

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X g\chi_E\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu.$$

特别地，若 $f(x)=g(x)(x\in E)$，则$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu$.

2° 若 f 仅为定义在某一$E\in\mathscr{A}$上的非负可测函数，或 f 仅在E 上非负可测，则可考虑 X 上的非负可测函数$\tilde{f}$(满足 $\tilde{f}(x)=f(x)(x\in E)$)，且规定 f 在E 上的积分

$$\int_E f\mathrm{d}\mu:=\int_E\tilde{f}\mathrm{d}\mu.$$

对于今后涉及的一般可测函数的积分也可做类似的说明，将不再赘述．

定理 5.1.4(Lebesgue 逐项积分定理) 设(f_n)为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的非负可测函数列，则

$$\int_E\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

证 令

$$g_k := \sum_{n=1}^{k} f_n \quad (k = 1,2,\cdots),$$

则(g_k)为 X 上的非负可测函数的不减序列,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)(x \in X),$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 在X 上非负可测．由 Levi 定理及其推论(1)(结合归纳法),有

$$\begin{aligned}\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu &= \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_E \left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right)\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_E f_n \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu .\end{aligned}$$

推论 1 设 f 为X 上的非负可测函数,(E_n)为一两两不交的可测集列,记 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,则

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu .$$

证 由(E_n)两两不交,$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,则易知 $\chi_E = \sum_n \chi_{E_n}$,于是由 Lebesgue 逐项积分定理以及 Levi 定理之推论(3),得

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}\right)\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f\chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f \mathrm{d}\mu .$$

推论 2 设 f,g 为非负可测函数,且 $f(x)=g(x)$ a.e.于 E,则$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$.

证 令 $E_0 := E(f\neq g)$,$E_1 := E \setminus E_0$,则 E_0,E_1 为 E 的可测子集,且 $\mu(E_0)=0$,则由推论 1、定义 5.1.2 后注 2°以及 Levi 定理之推论后注 1°,可得

$$\begin{aligned}\int_E f \mathrm{d}\mu &= \int_{E_0} f \mathrm{d}\mu + \int_{E_1} f \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{E_1} g \mathrm{d}\mu = \int_{E_0} g \mathrm{d}\mu + \int_{E_1} g \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu .\end{aligned}$$

推论 3 设 f 为非负可测函数,则 $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$ 的充要条件是 $f(x)=0$ a.e. 于 E.

证 由上述推论 2 即知充分性成立．下证必要性．令

$$E_n:=E\left(f>\frac{1}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

则由定理 5.1.2(1)、(2),

$$0\leqslant\frac{1}{n}\mu(E_n)\leqslant\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是 $\mu(E_n)=0(n=1,2,\cdots)$. 又,$E(f\neq0)=E(f>0)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,即知 $\mu(E(f>0))=0$.

定理 5.1.5(Fatou) 设(f_n)为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的非负可测函数列,则

$$\int_E(\varliminf_{n\to\infty}f_n)\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

证 令

$$g_n:=\inf_{k\geqslant n}f_k\quad(n=1,2,\cdots),$$

则(g_n)为 X 上的非负可测函数的不减序列,且

$$0\leqslant g_n(x)\leqslant f_n(x)(n=1,2,\cdots),\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\varliminf_{n\to\infty}f_n(x)(x\in X).$$

于是,由 Levi 定理得

$$\int_E(\varliminf_{n\to\infty}f_n)\mathrm{d}\mu=\int_E\lim_{n\to\infty}g_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu=\varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu.$$

5.1.3 一般可测函数的积分

定义 5.1.3 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$\mathscr{A}$为 X 上的σ 代数,f 为X 上的可测函数,$E\in\mathscr{A}$,若 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_E f^-\mathrm{d}\mu$ 中至少有一个为有限,则定义 f 在 E 上(关于测度 μ)的积分为

$$\int_E f\mathrm{d}\mu:=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu,$$

并称 f 在E 上(关于测度 μ)的积分存在(或确定、或有意义). 当 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu$ 与

$\int_E f^- \mathrm{d}\mu$ 均为有限,则称 f 在 E 上(关于测度 μ)可积.

在 $E\in\mathscr{A}$ 上关于测度 μ 可积的可测函数全体记为 $L(E,\mu)$. 如果约定在某一固定的测度 μ 下考虑可积函数,则简记为 $L(E)$.

定理 5.1.6 设以下所述的函数均为$(X,\mathscr{A},\mu)$上的可测函数.

(1)若 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在,则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_E \mathrm{d}\mu;$$

(2)若 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在,则对任一 $c\in\mathbf{R}$, $\int_E cf\mathrm{d}\mu$ 存在,且

$$\int_E cf\mathrm{d}\mu = c\int_E f\mathrm{d}\mu;$$

(3)若 $\mu(E)=0$,则 $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$;

(4)若 $\int_X f\mathrm{d}\mu$ 存在(或有限),则对任一 $E\in\mathscr{A}$, $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在(相应地,有限);

(5)设(E_n)为两两不交的可测集列,记 $E:=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$,若 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在,则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\mathrm{d}\mu;$$

(6)若 $f(x)\leqslant g(x)$ a.e.于 E,且 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 与 $\int_E g\mathrm{d}\mu$ 均存在,则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g\mathrm{d}\mu;$$

(7)若 $f(x)=g(x)$ a.e.于 E, $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在,则 $\int_E g\mathrm{d}\mu$ 存在,且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu;$$

(8)$f\in L(E,\mu)\Leftrightarrow|f|\in L(E,\mu)$,且有

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\mathrm{d}\mu;$$

(9)若 $|f(x)|\leqslant|g(x)|$ a.e.于 E,且 $g\in L(E)$,则 $f\in L(E)$;

(10)若 $f\in L(E)$,则 $|f(x)|<+\infty$ a.e. 于 E;

(11)若 $f,g\in L(E)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则 $\alpha f+\beta g\in L(E)$,且

$$\int_E(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}\mu=\alpha\int_E f\mathrm{d}\mu+\beta\int_E g\mathrm{d}\mu;$$

(12)若对任一 $E\in\mathscr{A}$ 成立 $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$,则 $f(x)=0$ a.e. 于 X;

(13)(积分的绝对连续性)若 $f\in L(E)$,则对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对于 E 的任一可测子集 E_0,当 $\mu(E_0)<\delta$ 时,恒有

$$\left|\int_{E_0}f\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_{E_0}|f|\mathrm{d}\mu<\varepsilon.$$

证　(1)

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu&=\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu\\&=\int_X f^+\chi_E\mathrm{d}\mu-\int_X f^-\chi_E\mathrm{d}\mu\\&=\int_X(f\chi_E)^+\mathrm{d}\mu-\int_X(f\chi_E)^-\mathrm{d}\mu=\int_X f\chi_E\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

(2)注意到

$$\begin{aligned}\int_E(cf)^+\mathrm{d}\mu&=\begin{cases}\int_E cf^+\mathrm{d}\mu, & c\in[0,+\infty),\\ \int_E(-c)f^-\mathrm{d}\mu, & c\in(-\infty,0)\end{cases}\\&=\begin{cases}c\int_E f^+\mathrm{d}\mu, & c\in[0,+\infty),\\ (-c)\int_E f^-\mathrm{d}\mu, & c\in(-\infty,0),\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_E(cf)^-\mathrm{d}\mu&=\begin{cases}\int_E cf^-\mathrm{d}\mu, & c\in[0,+\infty),\\ \int_E(-c)f^+\mathrm{d}\mu, & c\in(-\infty,0)\end{cases}\\&=\begin{cases}c\int_E f^-\mathrm{d}\mu, & c\in[0,+\infty),\\ (-c)\int_E f^+\mathrm{d}\mu, & c\in(-\infty,0),\end{cases}\end{aligned}$$

于是,若 $f^+\in L(E)$,则 $|c|\int_E f^+\mathrm{d}\mu<+\infty$;若 $f^-\in L(E)$,则 $|c|\int_E f^-\mathrm{d}\mu<+\infty$. 由此可知,$(cf)^+$ 与 $(cf)^-$ 中至少有一个在 E 上可积,即得积分 $\int_E cf\mathrm{d}\mu$ 存在,且有

$$\int_E cf\mathrm{d}\mu=\int_E(cf)^+\mathrm{d}\mu-\int_E(cf)^-\mathrm{d}\mu$$

$$=\begin{cases}c\int_E f^+\mathrm{d}\mu-c\int_E f^-\mathrm{d}\mu, & c\in[0,+\infty),\\ (-c)\int_E f^-\mathrm{d}\mu-(-c)\int_E f^+\mathrm{d}\mu, & c\in(-\infty,0)\end{cases}$$

$$=c\left(\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu\right)=c\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

(3)若 $\mu(E)=0$,则 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu=\int_E f^-\mathrm{d}\mu=0$,于是 $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$.

(4)对于任一 $E\in\mathscr{A}$,有

$$\int_E f^+\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X f^+\mathrm{d}\mu,\int_E f^-\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X f^-\mathrm{d}\mu,$$

由此即知,若 $f^+\in L(X)$,则 $f^+\in L(E)$;若 $f^-\in L(X)$,则 $f^-\in L(E)$,于是,若 f 在 X 上积分存在(或可积),则 f 在 E 上积分存在(相应地,可积).

(5)由 Lebesgue 逐项积分定理之推论 1,

$$\int_E f^+\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+\mathrm{d}\mu,\int_E f^-\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^-\mathrm{d}\mu.$$

因为 f 在 E 上的积分存在,所以上述两式右端的正项级数至少有一个收敛,由此易知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+\mathrm{d}\mu-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^-\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{E_n}f^+\mathrm{d}\mu-\int_{E_n}f^-\mathrm{d}\mu\right);$$

又由(4)可知,f 在 E 的任一可测子集 E_n 上的积分存在. 注意到,上式左端即为 $\int_E f^+\mathrm{d}\mu-\int_E f^-\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu$,而右端即为 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu$.

(6)令 $E_0:=E(f>g)$,$E_1:=E\setminus E_0$,则 $E_0\subset E$ 且 $\mu(E_0)=0$. 因 f 与 g 在 E 上的积分存在,故由(4)知 f 与 g 在 E_1 上的积分存在. 又注意到,若 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $f^+(x)\leqslant g^+(x)$ 且 $f^-(x)\geqslant g^-(x)$,于是由(3)、(5)以及

Levi 定理之推论后注 1°,可得

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_{E_0} f\mathrm{d}\mu + \int_{E_1} f\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f\mathrm{d}\mu = \int_{E_1} f^+ \mathrm{d}\mu - \int_{E_1} f^- \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \int_{E_1} g^+ \mathrm{d}\mu - \int_{E_1} g^- \mathrm{d}\mu = \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu = \int_{E_0} g\mathrm{d}\mu + \int_{E_1} g\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu.$$

(7)显然,若 $f(x)=g(x)$ a.e. 于 E,则 $f^+(x)=g^+(x)$ a.e. 于 E 且 $f^-(x)=g^-(x)$ a.e. 于 E. 由定理 5.1.4 推论 2,

$$\int_E f^+ \mathrm{d}\mu = \int_E g^+ \mathrm{d}\mu, \int_E f^- \mathrm{d}\mu = \int_E g^- \mathrm{d}\mu,$$

由此可知,若 $\int_E f\mathrm{d}\mu$ 存在,则 $\int_E g\mathrm{d}\mu$ 存在,且 $\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathrm{d}\mu$.

(8)注意到,若 f 可测,则 $|f|$ 可测,又

$$f \in L(E) \Leftrightarrow \int_E f^+ \mathrm{d}\mu < +\infty \text{ 且} \int_E f^- \mathrm{d}\mu < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_E f^+ \mathrm{d}\mu + \int_E f^- \mathrm{d}\mu < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_E (f^+ + f^-)\mathrm{d}\mu = \int_E |f| \mathrm{d}\mu < +\infty$$

$$\Leftrightarrow |f| \in L(E).$$

此外,

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \quad (x \in X),$$

于是由(2)、(6)可得

$$-\int_E |f| \mathrm{d}\mu = \int_E (-|f|)\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |f| \mathrm{d}\mu,$$

上式即为 $\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\mathrm{d}\mu$.

(9)注意到,f 与 g 可测,因此作为非负可测函数的 $|f|$ 与 $|g|$,它们在 E 上的积分恒存在. 由于 $g \in L(E)$,由(8)知 $|g| \in L(E)$,由(6)有

$$\int_E |f| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |g| \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

可知 $|f| \in L(E)$,再次利用(8)即知 $f \in L(E)$.

(10)由(8),若 $f\in L(E)$,则 $|f|\in L(E)$,即 $\int_E |f|\mathrm{d}\mu<+\infty$,再由定理 5.1.2(3)即得 $|f(x)|<+\infty$ a.e. 于 E.

(11)首先,因为 $f,g\in L(E)$,所以 $E_0:=E(|f|=+\infty)\cup E(|g|=+\infty)$ 为零测集. 易知,若令

$$(\alpha f+\beta g)(x)=0 \quad (x\in E_0\cup E^c),$$

则既不影响 $\alpha f+\beta g$ 在 X 上的可测性,也不改变其在 E 上的可积性及其积分值. 于是,我们不妨设 f,g 均为 X 上的有限值可测函数.

其次,由于

$$|\alpha f(x)+\beta g(x)|\leqslant|\alpha||f(x)|+|\beta||g(x)|, x\in X,$$

$$\int_E(|\alpha||f|+|\beta||g|)\mathrm{d}\mu=|\alpha|\int_E|f|\mathrm{d}\mu+|\beta|\int_E|g|\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

由(9)可知 $\alpha f+\beta g\in L(E)$. 结合(2),只需证明

$$\int_E(f+g)\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\int_E g\mathrm{d}\mu$$

成立即可.

注意到,在所作假设下恒有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)(x\in X),$$

又

$$(f+g)(x)=(f+g)^+(x)-(f+g)^-(x),$$

$$f(x)+g(x)=(f^+(x)-f^-(x))+(g^+(x)-g^-(x)),$$

以上两式中的每一项均为有限数,因此经移项可得

$$(f+g)^++f^-+g^-=(f+g)^-+f^++g^+,$$

于是

$$\int_E(f+g)^+\mathrm{d}\mu+\int_E f^-\mathrm{d}\mu+\int_E g^-\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_E((f+g)^++f^-+g^-)\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_E((f+g)^-+f^++g^+)\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_E (f+g)^- \mathrm{d}\mu + \int_E f^+ \mathrm{d}\mu + \int_E g^+ \mathrm{d}\mu.$$

再由于上式中的每一个积分值均为有限数,经移项得

$$\int_E (f+g)^+ \mathrm{d}\mu - \int_E (f+g)^- \mathrm{d}\mu$$

$$= \left(\int_E f^+ \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \mathrm{d}\mu\right) + \left(\int_E g^+ \mathrm{d}\mu - \int_E g^- \mathrm{d}\mu\right),$$

即得所证.

(12)首先,由 $\int_X f\mathrm{d}\mu = 0$ 知 $f \in L(X)$,即得 $|f| \in L(X)$. 其次,令 $E := f^{-1}((0,+\infty])$,即 $E, E^c \in \mathscr{A}$,且

$$|f(x)| = f(x)(x \in E);\ |f(x)| = -f(x)(x \in E^c),$$

于是

$$\int_X |f| \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \mathrm{d}\mu + \int_{E^c} |f| \mathrm{d}\mu$$

$$= \int_E f\mathrm{d}\mu + \int_{E^c} (-f)\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu - \int_{E^c} f\mathrm{d}\mu = 0.$$

再由定理 5.1.4 推论 3 知: $|f(x)| = 0$ a.e. 于 X,亦即 $f(x) = 0$ a.e. 于 X.

(13)由于 $f \in L(E) \Leftrightarrow |f| \in L(E)$,即 $\int_E |f| \mathrm{d}\mu < +\infty$,因此,对于任一 $\varepsilon > 0$,存在 $\varphi \in \mathscr{C}_{|f|}$ 使得

$$\int_E \varphi \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E |f| \mathrm{d}\mu < \int_E \varphi \mathrm{d}\mu + \frac{\varepsilon}{2},$$

又由非负简单函数的定义知,$0 \leqslant \varphi(x) < c < +\infty (x \in X)$. 现取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$,则对于 E 的任一可测子集 E_0,当 $\mu(E_0) < \delta$ 时,恒有

$$\left|\int_{E_0} f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_{E_0} |f| \mathrm{d}\mu = \left(\int_{E_0} |f| \mathrm{d}\mu - \int_{E_0} \varphi \mathrm{d}\mu\right) + \int_{E_0} \varphi \mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{E_0} (|f| - \varphi)\mathrm{d}\mu + \int_{E_0} \varphi \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E (|f| - \varphi)\mathrm{d}\mu + \int_{E_0} \varphi \mathrm{d}\mu$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + c \cdot \mu(E_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

定理 5.1.7(Lebesgue 控制收敛定理)　设 f_n 在 $E(\in \mathscr{A})$ 上可测($n = 1$,

$2,\cdots$)，若存在 E 上的非负可积函数 g，使得

$$|f_n(x)|\leqslant g(x)\ \text{a.e.}\ 于\ E\quad (n=1,2,\cdots),$$

则 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n,\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n\in L(E)$，且

$$\int_E(\varliminf_{n\to\infty} f_n)\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E(\varlimsup_{n\to\infty} f_n)\mathrm{d}\mu.$$

特别地，若存在可测函数 f 使得

$$f_n(x)\to f(x)\ \text{a.e.}\ 于\ E\quad 或\quad f_n(x)\Rightarrow f(x)\ 于\ E,$$

则 $f\in L(E)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu=0.$$

(由上式必有：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu$.)

证　由定理的条件即知 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 与 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 均在 E 上可测，且

$$|\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)|\leqslant g(x),\ |\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)|\leqslant g(x)\ \text{a.e.}\ 于\ E.$$

又由定理 5.1.6(9)、(10)知，

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n,\varlimsup_{n\to\infty} f_n,f_n\in L(E)\quad (n=1,2,\cdots)$$

且均在 E 上 a.e.有限．进而，由定理 5.1.6(7)，我们不妨假定它们以及 g 均为 E 上的有限可积函数，且 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ 在 E 上处处成立($n=1,2,\cdots$)．由此，$g\pm f_n$($n=1,2,\cdots$)在 E 上非负可测，于是由 Fatou 定理得

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty}(g\pm f_n)\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E(g\pm f_n)\mathrm{d}\mu.$$

即得

$$\int_E g\mathrm{d}\mu+\int_E\varliminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E g\mathrm{d}\mu+\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_E g\mathrm{d}\mu-\int_E\varlimsup_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E g\mathrm{d}\mu-\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu,$$

上述两式经移项后即得

$$\int_E\varliminf_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_E\varlimsup_{n\to\infty} f_n\mathrm{d}\mu.$$

若存在可测函数 f 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ a.e. 于 E，则

$$|f(x)| \leqslant g(x) \text{ a.e. 于 } E,$$

于是 $f\in L(E)$. 此外，注意到

$$|(f_n - f)(x)| \leqslant 2g(x), \lim_{n\to\infty} |(f_n - f)(x)| = 0 \text{ a.e. 于 } E,$$

由已证之不等式可知，

$$0 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \leqslant \int_E \overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n - f| \mathrm{d}\mu = 0,$$

从而证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n - f|\mathrm{d}\mu = 0$.

若存在可测函数 f 使得 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 于 E. 记

$$\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu,$$

则存在子列 (f_{n_k}) 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k} - f| \mathrm{d}\mu = \alpha.$$

由于此时必有 (f_{n_k}) 在 E 上依测度收敛于 f，则由 Riesz 定理，存在子列 $(f_{n_{k_l}})$ 在 E 上 a.e. 收敛于 f. 从而由上段已证之结论即得

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_k} - f| \mathrm{d}\mu = \lim_{l\to\infty} \int_E |f_{n_{k_l}} - f| \mathrm{d}\mu = 0.$$

至此定理证毕.

§5.2 Lebesgue 积分与 Riemann 积分

在本节中，$L(\mathbf{R})$ 总表示 $\mathbf{R}$ 上的关于测度 m 可积的 $\mathscr{L}$ 可测函数全体.

定理 5.2.1 设 $f\in L(\mathbf{R})$，则对任一 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的连续函数 g 使得

$$\int_{\mathbf{R}} |f - g| \mathrm{d}m < \varepsilon.$$

(此定理对于 $\mathbf{R}$ 上的 L-S 测度也成立.)

证 因为 $f\in L(\mathbf{R}) \Leftrightarrow |f| \in L(\mathbf{R})$，所以由 Lebesgue 控制收敛定理(此处的控制函数为 $|f|$)可知，对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $E_N=(-N,N)$，使得

$$\int_{\mathbf{R}} \left| f - f\chi_{E_N} \right| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对上述函数 $f\chi_{E_N}$,由可测函数与简单函数的关系以及控制收敛定理(此处的控制函数为$\left| f\chi_{E_N} \right|$)知,存在简单函数 φ,使得

$$\int_{\mathbf{R}} \left| f\chi_{E_N} - \varphi \right| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

显然,$\mathrm{supp}\{\varphi\} \subset [-N, N]$,且可设$|\varphi(x)| < c < +\infty (x \in \mathbf{R})$.

对上述函数 φ,由 Лузин 定理与其推论以及与上述类似的理由,存在 $\mathbf{R}$ 上的具有紧支集的连续函数 g,使得$|g(x)| \leqslant c\chi_{E_{N+1}}(x) (x \in \mathbf{R})$,且(此处的控制函数就取 $c\chi_{E_{N+1}}$)

$$\int_{\mathbf{R}} |\varphi - g| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{3}.$$

综合上述三个不等式,定理得证 .

推论 设 $f \in L(\mathbf{R})$,则存在 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的连续函数列(g_n)使得

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{R}} |f - g_n| \mathrm{d}m = 0.$$

定理 5.2.2 设 $f \in L(\mathbf{R})$,则存在 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的阶梯函数列(φ_n)使得

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_E |f - \varphi_n| \mathrm{d}\mu = 0$;

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ a.e. 于 $\mathbf{R}$.

(此定理对于 $\mathbf{R}$ 上的 L-S 测度也成立 .)

证 由定理 5.2.1,对于任一 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}$ 上的具有紧支集的连续函数 g,使得 $\mathrm{supp}\{g\} \subset [a, b]$,且

$$\int_{\mathbf{R}} |f - g| \mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由此可知,存在 $\mathbf{R}$ 上的阶梯函数 φ,使得 $\mathrm{supp}\{\varphi\} \subset [a, b]$且

$$|g(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, x \in \mathbf{R},$$

从而

$$\int_{\mathbf{R}} |f - \varphi| \mathrm{d}m \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f - g| \mathrm{d}m + \int_{\mathbf{R}} |g - \varphi| \mathrm{d}m$$

$$= \int_{\mathbf{R}} |f - g| \mathrm{d}m + \int_{[a,b]} |g - \varphi| \mathrm{d}m < \varepsilon.$$

上述结论的另一种表述形式即为定理结论(1).

又对于任一 $\sigma>0$,令

$$E_n := \mathbf{R}(|f - \varphi_n| \geqslant \sigma) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

式中的 φ_n 为满足(1)的函数. 则由

$$m(E_n) \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_{E_n} |f - \varphi_n| \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\sigma}\int_{E} |f - \varphi_n| \mathrm{d}\mu$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)=0$,即 $\varphi_n(x)\Rightarrow f(x)$ 于 $\mathbf{R}$. 再由 Riesz 定理,存在子列 (φ_{n_k}) 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(x)=f(x)$ a.e. 于 $\mathbf{R}$. 显然,此 (φ_{n_k}) 同时满足定理结论(1)、(2).

定理 5.2.3 (1)若 $f\in R[a,b]$,则 $f\in L[a,b]$,且

$$\int_{[a,b]} f\mathrm{d}m = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

(2)若 $f\in B[a,b]$,则 $f\in R[a,b]$ 的充要条件为 f 在 $[a,b]$ 上 m-a.e. 连续.

证 设 $f\in B[a,b]$,则存在 $M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M<+\infty(x\in[a,b])$. 由 Riemann 积分理论中的 Darboux 定理知,存在 $[a,b]$ 上的一列分划 $\{\pi_k\}$,

$$\pi_k : a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{k_n}^{(k)} = b \quad (k = 1,2,\cdots),$$

满足:π_{k+1} 是 π_k 的加细,$\lambda(\pi_k)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}\{x_j^{(k)}-x_{j-1}^{(k)}\}<\frac{1}{k}$,且

$$\lim_{k\to\infty} U(f;\pi_k) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x, \lim_{k\to\infty} L(f;\pi_k) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

上述 $U(f;\pi_k)$ 与 $L(f;\pi_k)$ 分别表示在划分 π_k 下 f 的 Darboux 大和与小和.

现令

$$\psi_k(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a], \\ M_j^{(k)}, & x \in (x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}], j = 1,2,\cdots,k_n, \\ 0, & x \in (b, +\infty), \end{cases}$$

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a], \\ m_j^{(k)}, x \in (x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}], j = 1,2,\cdots,k_n & (k = 1,2,\cdots), \\ 0, & x \in (b, +\infty), \end{cases}$$

其中 $M_j^{(k)}, m_j^{(k)}$ 分别表示 $f(x)$ 在区间 $[x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}]$ 的上、下确界．于是

$$U(f;\pi_k) = \int_{[a,b]} \psi_k \mathrm{d}m, L(f;\pi_k) = \int_{[a,b]} \varphi_k \mathrm{d}m.$$

注意到 π_{k+1} 是 π_k 的加细，因此

$$-M \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant \cdots \leqslant \psi_2(x) \leqslant \psi_1(x) \leqslant M,$$

$$x \in [a,b],$$

由此得

$$\psi(x) := \lim_{k\to\infty} \psi_k(x), \varphi(x) := \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x), x \in \mathbf{R}.$$

显然，

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x), x \in [a,b],$$

且 ψ 与 φ 均为 $\mathbf{R}$ 上的有界 $\mathscr{L}$ 可测函数，从而均在 $[a,b]$ 上 L 可积．由 Lebesgue 控制收敛定理，

$$\int_{[a,b]} \psi \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_k \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} U(f;\pi_k) = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{[a,b]} \varphi \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_k \mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} L(f;\pi_k) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

结合数学分析中有关的 $\mathbf{R}$ 积分的理论，有

$$\begin{aligned} f \in R[a,b] &\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \int_{[a,b]} \psi \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \varphi \mathrm{d}m \Leftrightarrow \int_{[a,b]} (\psi - \varphi)\mathrm{d}m = 0 \\ &\Leftrightarrow (\psi - \varphi)(x) = 0 \text{ a.e. 于} [a,b] \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x) \text{ a.e. 于} [a,b], \end{aligned}$$

由此可知，$f(x) = \varphi(x)$ a.e. 于 $[a,b]$，再由 m 为完备测度可知，f 为 $[a,b]$ 上的有界 $\mathscr{L}$ 可测函数，从而为 $[a,b]$ 上的 L 可积函数，且

$$\int_{[a,b]} f \mathrm{d}m = \int_{[a,b]} \varphi \mathrm{d}m = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

至此,(1)得证.

记

$$E := \{x_j^{(k)} \mid j = 0,1,\cdots,k_n ; k = 1,2,\cdots\},$$

则 E 为可数集,从而为 m-零测集. 又注意到,若 $x \in [a,b] \setminus E$,则 f 在点 x 连续当且仅当 $\varphi(x) = \psi(x)$. 事实上,此时对于任一 $k \in \mathbf{N}$,存在惟一的 $k_j \in \{1,2,\cdots,k_n\}$ 使得 $x \in (x_{k_j-1}^{(k)}, x_{k_j}^{(k)})$,且 $x_{k_j-1}^{(k)} \uparrow x, x_{k_j}^{(k)} \downarrow x, \varphi_k(x) = m_{k_j}^{(k)}$, $\psi_k(x) = M_{k_j}^{(k)}$,因此

$$\begin{aligned}\lim_{t \to x} f(t) = f(x) &\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} m_{k_j}^{(k)} = \lim_{k \to \infty} M_{k_j}^{(k)} \\ &\Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = \lim_{k \to \infty} \psi_k(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x).\end{aligned}$$

综上所述,可推得:

有界函数 f 在 $[a,b]$ 上 a.e. 连续 $\Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(x)$ a.e. 于 $[a,b] \Leftrightarrow f \in R[a,b]$.这便证明了(2).

至此定理证毕.

注 Lebesgue 积分与 R 反常积分的关系:

以下仅对 R 无穷积分加以讨论,其实对于瑕积分也有类似的结论. 同时约定,以下所涉及到的积分的定义以及 f 所需要的其他条件认为是自明的,不再一一指出;且请读者自行考虑具体推导过程的详细理由.

(1)若 $f \geqslant 0$,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,+\infty)} f \mathrm{d}m$.

事实上,取 $b_n = a + n$,则有

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \int_{[a,b_n]} f \mathrm{d}m \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{[a,+\infty)} f \chi_{[a,b_n]} \mathrm{d}m = \int_{[a,+\infty)} f \mathrm{d}m.\end{aligned}$$

(2)若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,+\infty)} f \mathrm{d}m$.

事实上,此时必有 $\int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x < +\infty$,于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} (f^+(x) - f^-(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{+\infty} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f^-(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{[a,+\infty)} f^+ \mathrm{d}m - \int_{[a,+\infty)} f^- \mathrm{d}m = \int_{[a,+\infty)} f\mathrm{d}m.$$

(3)若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 条件收敛,则 f 在$[a,+\infty)$上的 L 积分不存在.

事实上,此时必有 $\int_{[a,+\infty)} f^+ \mathrm{d}m = \int_a^{+\infty} f^{\pm}(x)\mathrm{d}x = +\infty$.

(4)由于 R 广义重积分的收敛与绝对收敛等价,且注意到定理 5.2.3 对于重积分也有类似的结论,从而若 R 广义重积分收敛,则此积分必与相应的 L 积分相等.

(5)注意 $\int_{[a,+\infty)} f\mathrm{d}m$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[a,b_n]} f\mathrm{d}m$ 的区别(此处的 $b_n \to +\infty$). 前者无极限可言,即对于 L 积分而言无所谓收敛与发散;而后者作为数列就有收敛与否的问题.

例如:设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}(x\in(0,+\infty)), f(0)=1$,取 $a=0, b_n=n$,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n]} f\mathrm{d}m = \lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

但由于 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为条件收敛,因此 $\int_{[0,+\infty)} f\mathrm{d}m$ 不存在.

§5.3 乘积空间上的积分

定义 5.3.1 设 $E\subset X\times Y$,分别取定 $x\in X$ 与 $y\in Y$,记

$$E_x := \{y \mid (x,y)\in E\}, E^y := \{x \mid (x,y)\in E\},$$

分别称 E_x 和 E^y 为集合 E 的 x-截口(集)和 y-截口(集).

定义 5.3.2 设 f 为定义在 $E(\subset X\times Y)$上的函数. 若取定 $x\in X$ 时 $E_x\neq\varnothing$,则定义 E_x 上的函数 f_x

$$f_x(y) := f(x,y), y\in E_x,$$

并称之为函数 f 的 x-截口(函数). 类似地,可定义 f 的 y-截口(函数)f^y

$$f^y(x) := f(x,y), x\in E^y.$$

关于截口集与截口函数有以下一些显而易见的性质.

1° 由定义 5.3.1 即知:若 $E, E_\lambda\subset X\times Y(\lambda\in\Lambda)$,则对于任一 $x\in X$,有

$$(E^c)_x = (E_x)^c, (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda)_x = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)_x, (\bigcap_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda)_x = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(E_\lambda)_x.$$

由定义 5.3.2 即知：若 $f,g,f_n(n=1,2,\cdots)$ 为 $X\times Y$ 上的函数，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则

2° $f\leqslant g\Leftrightarrow$对于任一 $x\in X$ 均有 $f_x\leqslant g_x$；

3° 对于任一 $x\in X$ 均有

$$(\alpha f+\beta g)_x = \alpha f_x + \beta g_x$$

(假定上式左、右两端的运算有意义)；

4° $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y)=f(x,y),(x,y)\in X\times Y\Leftrightarrow$对于任一 $x\in X$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n)_x(y)=f_x(y), y\in Y$；

5° 对于任一 $x\in X$， 有 $(f^+)_x=(f_x)^+,(f^-)_x=(f_x)^-$.

6° 对于任一 $V\subset\mathbf{R}^*$，有 $(f^{-1}(V))_x=(f_x)^{-1}(V)$；

7° 对于任一 $x\in X$， 有 $(\chi_E)_x=\chi_{E_x}$.

关于集合与函数的 y-截口也有类似的结论，不再赘述.

定义 5.3.3 设 $\mathscr{A}_X$ 和 $\mathscr{A}_Y$ 分别为 X 和 Y 上的 σ 代数，记

$$\mathscr{C} := \{A\times B \mid A\in\mathscr{A}_X, B\in\mathscr{A}_Y\},$$

由 $\mathscr{C}$ 生成的代数 $\mathbf{K}(\mathscr{C})$ 和 σ 代数 $\mathbf{S}(\mathscr{C})$ 被分别称为 $\mathscr{A}_X$ 与 $\mathscr{A}_Y$ 的乘积代数和乘积 σ 代数. 特别地，将 $\mathbf{S}(\mathscr{C})$ 记为 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$，并称 $(X\times Y,\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y)$ 为可测空间 $(X,\mathscr{A}_X)$ 与 $(Y,\mathscr{A}_Y)$ 的乘积可测空间，$\mathscr{C}$ 中的元素称为可测矩形，$\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 中的元素称为乘积空间 $X\times Y$ 中的可测集.

(注意，由于历史的原因，不要将 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 与 $\mathscr{C}$ 混淆.)

定理 5.3.1 设 $(X\times Y,\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y)$ 为一乘积可测空间，

(1) 若 $E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$，则对于任一 $x\in X, y\in Y$ 有

$$E_x\in\mathscr{A}_Y,\quad E^y\in\mathscr{A}_X;$$

(2) 若 f 为 $X\times Y$ 上的 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 可测函数，则对于任一 $x\in X$，f_x 为 Y 上的 $\mathscr{A}_Y$ 可测函数，对于任一 $y\in Y$，f^y 为 X 上的 $\mathscr{A}_X$ 可测函数.

证 我们只对 x-截口加以证明.

(1) 设 $E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$. 任意取定 $x\in X$，令

$$\mathscr{E} := \{E \mid E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y, E_x\in\mathscr{A}_Y\},$$

则由截口集的性质 1° 以及 $\mathscr{A}_X,\mathscr{A}_Y$ 与 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 均为 σ 代数即知，$\mathscr{E}$ 为 $X\times Y$ 上的 σ 代数. 又若 $E=A\times B\in\mathscr{C}$，则当 $x\in A$ 时 $E_x=B$，当 $x\in A^c$ 时 $E_x=\varnothing$，

即此时总有 $E_x \in \mathscr{A}_Y$，于是 $\mathscr{C} \subset \mathscr{E}$，进而 $\mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y \subset \mathscr{E}$. 此即说明：若 $E \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$，则 $E_x \in \mathscr{A}_Y (x \in X)$.

(2)对于 $\mathbf{R}^*$ 中的任一开集 V，则由 f 为 $X \times Y$ 上的 $\mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$ 可测函数可知，必有 $f^{-1}(V) \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$. 又由已证之(1)以及有关截口的性质6°即知

$$(f_x)^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_x \in \mathscr{A}_Y, x \in X.$$

这就证明了 f_x 为 Y 上的 $\mathscr{A}_Y$ 可测函数.

引理　$\mathbf{K}(\mathscr{C})$是由可表为 $\mathscr{C}$ 中有限个两两不交的元素之并集全体所成之集族.

引理的证明留给读者.

定理5.3.2　设$(X, \mathscr{A}_X, \mu_X)$和$(Y, \mathscr{A}_Y, \mu_Y)$为两个 σ 有限测度空间，其中 $\mathscr{A}_X, \mathscr{A}_Y$ 分别为 X, Y 上的 σ 代数.

(1)设 $E \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$，定义

$$\varphi_E(x) := \mu_Y(E_x), x \in X,$$

则 φ_E 是 X 上的(非负)$\mathscr{A}_X$ 可测函数；

(2)由下式

$$\mu_X \times \mu_Y(E) := \int_X \varphi_E \mathrm{d}\mu_X, E \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$$

定义的 $\mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$ 上的集函数 $\mu_X \times \mu_Y$ 是$(X \times Y, \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y)$上的 σ 有限测度，且

$$\mu_X \times \mu_Y(A \times B) = \mu_X(A)\mu_Y(B), A \in \mathscr{A}_X, B \in \mathscr{A}_Y,$$

此外，满足上式的乘积测度空间上的测度是惟一的.

证　(1)先假定 μ_Y 为有限测度. 令

$$\mathscr{A} := \{E \mid E \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y, \varphi_E \text{ 在} X \text{ 上 } \mathscr{A}_X \text{ 可测}\},$$

往证 $\mathscr{A} = \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$.

显然 $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$，为了得到 $\mathscr{A} \supset \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$，只需证明 $\mathscr{A}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数即可.

设 $E \in \mathscr{C}$，则 $E = A \times B$(其中 $A \in \mathscr{A}_X, B \in \mathscr{A}_Y$). 此时必有 $E \in \mathscr{A}_X \times \mathscr{A}_Y$，且

$$\varphi_E(x) = \mu_Y(E_x) = \mu_Y(B)\chi_A(x), x \in X.$$

故 φ_E 在 X 上 $\mathscr{A}_X$ 可测，从而证得 $E \in \mathscr{A}$. 此即说明 $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$.

设 $E\in\mathscr{A}$,则 $E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$,于是 $E^c\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$;又由 μ_Y 为有限测度的假定,可知

$$\begin{aligned}\varphi_{E^c}(x)&=\mu_Y((E^c)_x)=\mu_Y((E_x)^c)\\&=\mu_Y(Y)-\mu_Y(E_x)=\mu_Y(Y)-\varphi_E(x),x\in X,\end{aligned}$$

上式中 $\mu_Y(Y)$为常数,而 φ_E 在X上 $\mathscr{A}_X$ 可测,于是 φ_{E^c} 在X上 $\mathscr{A}_X$ 可测,从而证得 $E^c\in\mathscr{A}$. 此即说明 $\mathscr{A}$满足 σ 代数定义中的条件之一:"$\mathscr{A}$关于取余运算封闭".

设 $E\in\mathbf{K}(\mathscr{C})$,则由引理,可记 $E:=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$,其中 $E_k\in\mathscr{C}(k=1,2,\cdots n)$,且 $E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$. 此时由已证之结论知 $\varphi_{E_k}(k=1,2,\cdots n)$在 X 上 $\mathscr{A}_X$ 可测. 注意到当 $i\neq j$ 时,必有$(E_i)_x\cap(E_j)_x=\varnothing(x\in X)$,于是

$$\varphi_E(x)=\mu_Y(E_x)=\mu_Y(\bigcup_{k=1}^{n}(E_k)_x)=\sum_{k=1}^{n}\mu_Y((E_k)_x)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{E_k}(x),$$

故此 φ_E 在X上 $\mathscr{A}_X$ 可测,从而 $E\in\mathscr{A}$. 此即说明 $\mathbf{K}(\mathscr{C})\subset\mathscr{A}$.

为证 $\mathscr{A}$为 σ 代数,由定理 3.1.5,只需证明 $\mathscr{A}$为单调族. 即往证:若(E_n)为 $\mathscr{A}$中的单调序列,则$\lim\limits_{n\to\infty}E_n\in\mathscr{A}$. 以下对两种单调性分别论证.

若(E_n)为 $\mathscr{A}$中的单调增序列,则 $E:=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$,$(\varphi_{E_n})$为 X 上的 $\mathscr{A}_X$ 可测函数列. 对于任一 $x\in X$,$((E_n)_x)$显然为 $\mathscr{A}_Y$ 中的单调增序列. 于是

$$((E_n)_x)\uparrow\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x=(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x=E_x,x\in X.$$

$$\varphi_{E_n}(x)=\mu_Y((E_n)_x)\leqslant\mu_Y((E_{n+1})_x)=\varphi_{E_{n+1}}(x),x\in X\quad(n=1,2,\cdots).$$

结合测度的下半连续性,推得

$$\varphi_E(x)=\mu_Y(E_x)=\lim_{n\to\infty}\mu_Y((E_n)_x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{E_n}(x),x\in X,$$

而 φ_E 为X上的 $\mathscr{A}_X$ 可测函数列(φ_{E_n})的极限函数必在 X 上 $\mathscr{A}_X$ 可测,从而证得 $E\in\mathscr{A}$.

若(E_n)为 $\mathscr{A}$中的单调减序列,则 $E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 由于 $\mathscr{A}$关于取余运算封闭(注意,我们仅在此处利用了 μ_Y 为有限测度的假定),因此$((E_n)^c)$为 $\mathscr{A}$中的单调增序列,结合上段在"单调增"的假定下所证之结论:

$$(E_n)^c \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)^c = E^c \in \mathscr{A},$$

从而 $E=(E^c)^c\in\mathscr{A}$.

这就证明了 $\mathscr{A}$ 是单调族．

至此，我们在 μ_Y 为有限测度的假定下证明了 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$，即证明了：对于任一 $E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$，$\varphi_E$ 均为 X 上的（非负）$\mathscr{A}_X$ 可测函数．

现设 μ_Y 为 σ 有限测度，则存在两两不交的 $\mathscr{A}_Y$ 可测集列 (B_n) 满足：

$$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,\mu_Y(B_n)<+\infty\quad(n=1,2,\cdots).$$

对于任一 $E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$，记

$$E_n:=E\cap(X\times B_n)\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 (E_n) 为分别位于 $X\times B_n$ 中的两两不交的 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 可测集列（参见习题 3.19），且 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$．由上述已证之结论可知 (φ_{E_n}) 为 X 上的非负 $\mathscr{A}_X$ 可测函数列，于是由

$$\varphi_E(x)=\mu_Y(E_x)=\mu_Y((\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)_x)=\mu_Y(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_Y((E_n)_x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{E_n}(x),x\in X,$$

即知 φ_E 为 X 上的非负 $\mathscr{A}_X$ 可测函数．

至此，我们证明了(1)．下证(2)．

(2) 由定义，显然有 $\mu_X\times\mu_Y(E)\geqslant 0(E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y)$ 且 $\mu_X\times\mu_Y(\varnothing)=0$；现设 (E_n) 为 $X\times Y$ 上两两不交的 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 可测集列，记 $E:=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，则有

$$\mu_X\times\mu_Y(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\int_X\varphi_E\mathrm{d}\mu_X=\int_X\mu_Y(E_x)\mathrm{d}\mu_X=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}\mu_Y((E_n)_x)\mathrm{d}\mu_X$$

$$=\int_X\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{E_n}\mathrm{d}\mu_X=\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\varphi_{E_n}\mathrm{d}\mu_X=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_X\times\mu_Y(E_n).$$

由此证得 $\mu_X\times\mu_Y$ 是 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 上的测度．

现设 $E=A\times B\in\mathscr{C}$，则有

$$\mu_X\times\mu_Y(A\times B)=\int_X\varphi_E\mathrm{d}\mu_X=\int_X\mu_Y(B)\chi_A\mathrm{d}\mu_X=\mu_X(A)\cdot\mu_Y(B).$$

此外，由假定 μ_X 与 μ_Y 均为 σ 有限测度，则在 X 与 Y 上分别存在两两不

交的可测集列(A_i)与(B_j)满足：

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i, \mu_X(A_i)<+\infty \quad (i=1,2,\cdots),$$

$$Y=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j, \mu_Y(B_j)<+\infty \quad (j=1,2,\cdots),$$

于是，$A_i\times B_j\in\mathscr{C}(i,j=1,2,\cdots)$，且

$$X\times Y=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(A_i\times B_j),$$

$$\mu_X\times\mu_Y(A_i\times B_j)=\mu_X(A_i)\cdot\mu_Y(B_j)<+\infty \quad (i,j=1,2,\cdots),$$

此即说明 $\mu_X\times\mu_Y$ 为σ有限测度．

最后，由以上所述以及引理，引用定理3.3.3即得定理所指的“惟一性”．

至此定理证毕．

定理 5.3.3(Fubini) 设$(X,\mathscr{A}_X,\mu_X)$和$(Y,\mathscr{A}_Y,\mu_Y)$为两个σ有限测度空间，其中$\mathscr{A}_X,\mathscr{A}_Y$分别为$X,Y$上的$\sigma$代数，$f$为$(X\times Y,\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y)$上的可测函数．

(1)若$f\in L(X\times Y,\mu_X\times\mu_Y)$，则存在$\mu_X$-零测集$A$与$\mu_Y$-零测集$B$，令

$$\varphi(x):=\begin{cases}\int_Y f_x\mathrm{d}\mu_Y, x\in A^c,\\ 0, x\in A,\end{cases} \qquad \psi(y):=\begin{cases}\int_X f^y\mathrm{d}\mu_X, y\in B^c,\\ 0, y\in B,\end{cases}$$

那么$\varphi\in L(X,\mu_X)$，$\psi\in L(Y,\mu_Y)$，且成立

$$\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\mu_X\times\mu_Y=\int_X\varphi\mathrm{d}\mu_X=\int_Y\psi\mathrm{d}\mu_Y; \qquad (*)$$

(2)若$|f|$的两个累次积分中有一个为有限，则另一个也有限，且此时f在$X\times Y$上可积，同时$(*)$式成立．

证 (1)首先，设$f=\chi_E$(其中$E\in\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$)，则

$$\varphi(x)=\int_Y f_x\mathrm{d}\mu_Y=\int_Y(\chi_E)_x\mathrm{d}\mu_Y=\int_Y\chi_{E_x}\mathrm{d}\mu_Y=\mu_Y(E_x), x\in X.$$

由定理5.3.2(1)，φ为X上的非负$\mathscr{A}_X$可测函数，又由定理5.3.2(2)，

$$\int_{X\times Y}f\mathrm{d}\mu_X\times\mu_Y=\int_{X\times Y}\chi_E\mathrm{d}\mu_X\times\mu_Y=\mu_X\times\mu_Y(E)=\int_X\varphi\mathrm{d}\mu_X.$$

再由积分的线性性质可知，当f为$X\times Y$上的非负简单函数时，也有

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y = \int_X \varphi \mathrm{d}\mu_X .$$

其次,设 f 为 $X\times Y$ 上的非负 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 可测函数,则存在 $X\times Y$ 上的非负简单函数的不减序列 (f_n) 满足:$f_n(x,y)\uparrow f(x,y)((x,y)\in X\times Y)$. 记

$$\varphi_n(x) := \int_Y (f_n)_x \mathrm{d}\mu_Y, x\in X,$$

则有

$$\int_{X\times Y} f_n \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y = \int_X \varphi_n \mathrm{d}\mu_X \quad (n=1,2,\cdots),$$

又由 $(f_n)_x(y)\uparrow f_x(y)(y\in Y)$ 可知 (φ_n) 为 X 上非负 $\mathscr{A}_X$ 可测函数的不减序列,记 $\varphi_n(x)\uparrow\varphi(x)(x\in X)$. 对上述两式先后应用 Levi 定理,即知当 f 为 $X\times Y$ 上的非负可测函数时,仍然有

$$\int_{X\times Y} f\mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y = \int_X \varphi \mathrm{d}\mu_X .$$

最后,设 f 为 $X\times Y$ 上的一般 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y$ 可测函数,且在 $X\times Y$ 上可积,令

$$\varphi^{\pm}(x) = \int_Y (f^{\pm})_x \mathrm{d}\mu_Y, x\in X,$$

则 φ^+ 与 φ^- 均在 X 上非负 $\mathscr{A}_X$ 可测,且由

$$\int_X \varphi^{\pm} \mathrm{d}\mu_X = \int_{X\times Y} f^{\pm} \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y < +\infty,$$

可知 φ^+ 与 φ^- 均在 X 上非负可积,从而在 X 上 μ_X-a.e. 有限. 记

$$A = X(\varphi^+ = +\infty) \cap X(\varphi^- = +\infty),$$

则 $\mu_X(A)=0$. 再令

$$\varphi = (\varphi^+ - \varphi^-)\chi_{A^c},$$

则 φ 为 X 上的可积函数,且当 $x\in A$ 时 $\varphi(x)=0$,当 $x\in A^c$ 时,

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) = \int_Y (f^+)_x \mathrm{d}\mu_Y - \int_Y (f^-)_x \mathrm{d}\mu_Y$$

$$= \int_Y (f_x)^+ \mathrm{d}\mu_Y - \int_Y (f_x)^- \mathrm{d}\mu_Y = \int_Y f_x \mathrm{d}\mu_Y .$$

此外,

$$\begin{aligned}\int_X \varphi \mathrm{d}\mu_X &= \int_{A^c} (\varphi^+ - \varphi^-) \mathrm{d}\mu_X \\ &= \int_{A^c} \varphi^+ \mathrm{d}\mu_X - \int_{A^c} \varphi^- \mathrm{d}\mu_X \\ &= \int_X \varphi^+ \mathrm{d}\mu_X - \int_X \varphi^- \mathrm{d}\mu_X \\ &= \int_{X\times Y} f^+ \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y - \int_{X\times Y} f^- \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y \\ &= \int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y .\end{aligned}$$

同理可证,存在 μ_Y-零测集B 以及定理叙述中的相应的ψ,使得

$$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y = \int_X \psi \mathrm{d}\mu_X .$$

(2)注意到上述关于"f 为$X\times Y$ 上的非负可测函数时"的证明的结论:

$$\int_{X\times Y} f \mathrm{d}\mu_X \times \mu_Y = \int_X \varphi \mathrm{d}\mu_X .$$

且将上式中的 f 视作$|f|$,φ 当然视作由$|f|$相应所得的函数,则知当 φ 在X上可积时(即所谓的函数$|f(x,y)|$的"先 x 后 y 的累次积分值有限"),$|f|$在$X\times Y$ 上的积分值也有限,即$|f|$在 $X\times Y$ 上可积,此等价于 f 在$X\times Y$ 上可积．然后再由(1)即证得(2).

至此定理证毕．

例 1 设 $u_{n,m}\in\mathbf{R}(n,m=1,2,\cdots)$,若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|u_{n,m}|<+\infty$,则 $\sum_{n,m=1}^{\infty}u_{n,m}$ 绝对收敛,且

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,m} .$$

证 事实上,只需在 Fubini 定理中,特别取 $X=Y=\mathbf{N}$,$\mathscr{A}_X=\mathscr{A}_Y=\mathscr{P}(\mathbf{N})$,$\mu_X=\mu_Y=\mu_c$($\mathscr{P}(\mathbf{N})$上的计数测度),$f(n,m)=u_{n,m}((n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N})$,则 $\mathscr{A}_X\times\mathscr{A}_Y=\mathscr{P}(\mathbf{N})\times\mathscr{P}(\mathbf{N})=\mathscr{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$,$\mu_X\times\mu_Y=\mu_c\times\mu_c$ 为 $\mathscr{P}(\mathbf{N}\times\mathbf{N})$上的计数测度,$f$ 当然为 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 上的 $\mathscr{P}(\mathbf{N})\times\mathscr{P}(\mathbf{N})$可测函数,于是由该定理(2)即得所证．

例 2(积分的几何意义) 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一 σ 有限测度空间,f 为X 上的非负有限值可测函数,记

$$\mathscr{G}(E,f) := \{(x,y) \mid (x,y)\in E\times\mathbf{R}, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}, E\in\mathscr{A},$$

则 $\mathscr{G}(E,f)$为$(X\times\mathbf{R},\mathscr{A}\times\mathscr{B},\mu\times m)$上的可测集,且

$$\mu\times m(\mathscr{G}(E,f))=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

证 令

$$\varphi(x,y)=y,\psi(x,y)=f(x),(x,y)\in X\times\mathbf{R},$$

则对于任一 $E\in\mathscr{A},a\in\mathbf{R}$,

$$E\times\mathbf{R}(\varphi>a)=E\times(a,+\infty)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B},$$

$$E\times\mathbf{R}(\psi>a)=E(f>a)\times\mathbf{R}\in\mathscr{A}\times\mathscr{B},$$

即 φ 与 ψ 均在 $X\times\mathbf{R}$ 上 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 可测,由此可知,

$$\mathscr{G}(E;f)=(E\times\mathbf{R}(\varphi\geqslant 0))\cap(E\times\mathbf{R}(\varphi\leqslant\psi))$$

为 $X\times\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{A}\times\mathscr{B}$ 可测集 . 从而

$$\mu\times m(\mathscr{G}(E;f))=\int_{X\times\mathbf{R}}\chi_{\mathscr{G}(E;f)}\mathrm{d}\mu\times m$$

$$=\int_X m((\mathscr{G}(E;f))_x)\mathrm{d}\mu=\int_X f\cdot\chi_E\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

§5.4 广义测度

5.4.1 广义测度的 Jordan-Hahn 分解

定义 5.4.1 设$(X,\mathscr{A})$为可测空间,如果集合函数

$$\nu:\mathscr{A}\to(-\infty,+\infty]$$

满足:(1)$\nu(\varnothing)=0$;

(2)若(E_n)为 $\mathscr{A}$ 中两两不交的序列,则

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n),$$

那么就称 ν 是$(X,\mathscr{A})$上的一个广义测度 .

又,若$|\nu(X)|<+\infty$,则称 ν 为有限广义测度;若存在 $\mathscr{A}$ 中的序列(E_n)使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 且$|\nu(E_n)|<+\infty(n=1,2,\cdots)$,则称 ν 为σ 有限广义测度 .

易证,上述定义条件(2)中等式右端的级数若收敛(于有限值),则必为绝对收敛 .

注 类似地,可给出 $\nu:\mathscr{A}\to[-\infty,+\infty)$ 为广义测度的相应定义.

例 1 设 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的测度,f 为 X 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数,且 $\int_X f^-\,\mathrm{d}\mu<+\infty$,定义集合函数 ν:

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A},$$

则 ν 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个广义测度.特别地,若 $f\in L(X;\mu)$,则由上式定义的 ν 是 $(X,\mathscr{A})$ 上的有限广义测度.

需要指出的是,广义测度并不具有测度的所有性质,例如:由例 1 可知,广义测度一般不具有单调性.特别地,设 $E,F\in\mathscr{A},E\subset F$ 且 $\nu(F)=0$,此时并不能推得 $\nu(E)=0$. 但是,由定义易知,广义测度还是具有下述较弱的性质:若 $E,F\in\mathscr{A},E\subset F$ 且 $\nu(F)<+\infty$,则 $\nu(E)<+\infty$.

定义 5.4.2 设 ν 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的广义测度.若集 $E\in\mathscr{A}$ 满足:对于任一 $A\in\mathscr{A}$,均有

$$\nu(A\cap E)\geqslant 0\quad(\nu(A\cap E)\leqslant 0),$$

则称 E 为关于 ν 的正定集(负定集),简称为 ν 正定集(ν 负定集).

引理 1 若 $E,E_n(n=1,2,\cdots)$ 为 ν 正(负)定集,则对于任一 $F\in\mathscr{A},E\cap F,E\setminus F$ 以及 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 也均为 ν 正(负)定集.

证明留作练习.

定理 5.4.1 (1)(**Hahn 分解**)对于 $(X,\mathscr{A})$ 上的任一广义测度 ν,均存在 $E\in\mathscr{A}$ 使得 E 为 ν 正定集,且 E^c 为 ν 负定集.

(2)(**Jordan 分解**)$(X,\mathscr{A})$ 上的任一广义测度 ν 均可分解为 $\nu=\nu^+-\nu^-$,其中 ν^+ 与 ν^- 均为 $\mathscr{A}$ 上的测度且 ν^- 还是有限的.进而,若 ν 为有限(或 σ 有限)广义测度,则 ν^+ 为有限(相应地,σ 有限)测度.(ν^+ 与 ν^- 分别称为 ν 的上变差与下变差.)

证 (1)令

$$\beta:=\inf\{\nu(E)\mid E\in\mathscr{A}\text{ 为 }\nu\text{ 负定集}\},$$

则存在 ν 负定集列 (E_n) 使得 $\nu(E_n)\to\beta$. 取 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,则由引理 1 知 B 为 ν 负定集,$\nu(B)=\beta$(请读者考虑其理由,且由此可知 $\beta\in(-\infty,0]$).

下证 $E=B^c$ 为 ν 正定集.用反证法.若 E 非 ν 正定集,则存在 $A_0\in\mathscr{A}$,$A_0\subset E$ 使得 $\nu(A_0)<0$. 而 A_0 不可能为 ν 负定集,否则 $B\cup A_0$ 将为 ν 负定集且 $\nu(B\cup A_0)=\nu(B)+\nu(A_0)<\beta$,此与 β 的定义矛盾.于是存在 $k_1\in\mathbf{N}$:

$$k_1=\min\{k \mid k\in\mathbf{N}\text{且存在}A\in\mathscr{A},A\subset A_0\text{使得}\nu(A)\geqslant\frac{1}{k}\},$$

从而存在 $A_1\in\mathscr{A},A_1\subset A_0$ 使得 $\nu(A_1)\geqslant\frac{1}{k_1}$. 此时,$A_0\setminus A_1\in\mathscr{A},A_0\setminus A_1\subset A_0\subset E$,且

$$\nu(A_0\setminus A_1)=\nu(A_0)-\nu(A_1)<0.$$

对 $A_0\setminus A_1$ 施行类似于上述对 A_0 的讨论,则存在 $k_2\in\mathbf{N}$:

$$k_2=\min\{k \mid k\in\mathbf{N}\text{且存在}A\in\mathscr{A},A\subset A_0\setminus A_1\text{使得}\nu(A)\geqslant\frac{1}{k}\},$$

从而存在 $A_2\in\mathscr{A},A_2\subset A_0\setminus A_1$ 使得 $\nu(A_2)\geqslant\frac{1}{k_2}$. 注意到,

$$(A_0\setminus A_1)\setminus A_2=A_0\setminus(A_1\cup A_2),A_1\cup A_2\subset A_0,A_1\cap A_2=\varnothing,$$

于是

$$\nu(A_0\setminus(A_1\cup A_2))=\nu(A_0)-(\nu(A_1)+\nu(A_2))<0.$$

如此以往,一般地,若 k_n 与 A_n 已确定,则令

$$k_{n+1}=\min\{k \mid k\in\mathbf{N}\text{且存在}A\in\mathscr{A},A\subset A_0\setminus\bigcup_{j=1}^{n}A_j\text{使得}\nu(A)\geqslant\frac{1}{k}\},$$

且设

$$A_{n+1}\in\mathscr{A},A_{n+1}\subset A_0\setminus\bigcup_{j=1}^{n}A_j,\nu(A_{n+1})\geqslant\frac{1}{k_{n+1}}.$$

此时,

$$\bigcup_{j=1}^{n+1}A_j\subset A_0,A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)\text{且}\nu(A_0\setminus\bigcup_{j=1}^{n+1}A_j)<0.$$

由此得到数列 (k_n) 及其 $\mathscr{A}$ 中相应的两两不交的序列 (A_n),且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset A_0$. 而由 $\nu(A_0)<0(<+\infty)$ 可知 $\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)<+\infty$,从而由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)=\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)<+\infty$$

推得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}=0$.

现令 $B_0:=A_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,则 B_0 为 ν 负定集. 事实上,如若不然,则存在

$\widetilde{B}\in\mathscr{A},\widetilde{B}\subset B_0$ 使得 $\nu(\widetilde{B})>0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}=0$,因此存在 $k_{n_0}>1$ 使得 $\nu(\widetilde{B})\geqslant\frac{1}{k_{n_0}}$,从而

$$\nu(\widetilde{B}\cup A_{n_0})=\nu(\widetilde{B})+\nu(A_{n_0})\geqslant\frac{2}{k_{n_0}}\geqslant\frac{1}{k_{n_0}-1},$$

但 $\widetilde{B}\cup A_{n_0}\subset A_0\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n_0-1}A_j$,这与 k_{n_0} 的定义矛盾. 此即说明 B_0 确是 ν 负定集. 又由

$$\nu(B_0)=\nu(A_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\nu(A_0)-\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n)<\nu(A_0)<0,$$

且注意到 $B_0\subset A_0\subset E(=B^c)$,可推得

$$\nu(B\cup B_0)=\nu(B)+\nu(B_0)<\nu(B)=\beta,$$

这又与 β 的定义矛盾. 这就证明了(1).

(2)取(1)中关于 ν 的 Hahn 分解 $X=E\cup E^c$,其中 E 为 ν 正定集,E^c 为 ν 负定集. 令

$$\nu^+(A):=\nu(A\cap E),\nu^-(A)=-\nu(A\cap E^c),A\in\mathscr{A},$$

则易证由上式所定义的 ν^+ 与 ν^- 即为所求. 具体的论证留给读者完成.

至此定理证毕.

注 1° 一般而言,Hahn 分解并非惟一.

2° 定理 5.4.1(2)的证明中由 Hahn 分解导出的 Jordan 分解不随 Hahn 分解的改变而改变. 即若

$$X=E\cup E^c=F\cup F^c$$

为关于 ν 的两个不同的 Hahn 分解,其中 E,F 为 ν 正定集,E^c,F^c 为 ν 负定集. 则

$$\nu(A\cap E)=\nu(A\cap F),\nu(A\cap E^c)=\nu(A\cap F^c),A\in\mathscr{A}.$$

上述两点的详细论证留给读者完成.

3° 若 μ_1 与 μ_2 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的两个测度,且 μ_2 有限,令

$$\nu(A)=\mu_1(A)-\mu_2(A),A\in\mathscr{A},$$

则易知 ν 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的广义测度,且当 μ_1 有限(或 σ 有限)时,ν 也有限(相应

地,σ 有限),因此,Jordan 分解即为此命题的反问题.

5.4.2 广义测度的绝对连续

定义 5.4.3 设 μ 为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,令

$$|\mu|(A):=\mu^+(A)+\mu^-(A),A\in\mathscr{A},$$

则称$|\mu|$为 μ 的全变差.

注 由于历史的原因,上述的$|\mu|(A)$并不是$|\mu(A)|$,一般地只成立

$$|\mu(A)|\leqslant|\mu|(A),$$

即广义测度 μ 的全变差$|\mu|$不能视作数值函数 μ 的绝对值函数.请读者自行完成上述不等式的证明以及等号不成立的实例的构造.

由定义 5.4.3 以及定理 5.4.1(2)可知,$(X,\mathscr{A})$上的广义测度 μ 的全变差$|\mu|$是$(X,\mathscr{A})$上的测度,且若 μ 有限(或 σ 有限),则$|\mu|$也有限(相应地,σ 有限).

定义 5.4.4 设 μ 与 ν 均为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,若对于任一 $A\in\mathscr{A}$,当$|\mu|(A)=0$ 时都有 $\nu(A)=0$,则称 ν 对于 μ 是绝对连续的,记为 $\nu\ll\mu$.

引理 2 设 μ 与 ν 均为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,则下述三条件相互等价:

(1)$\nu\ll\mu$;

(2)$\nu^+\ll\mu$ 且 $\nu^-\ll\mu$;

(3)$|\nu|\ll|\mu|$.

引理 2 的证明留作练习.

定理 5.4.2 设 ν 与 μ 均为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,且 ν 有限,则 $\nu\ll\mu$ 的充要条件是:对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $A\in\mathscr{A}$ 且$|\mu|(A)<\delta$ 时,恒有$|\nu|(A)<\varepsilon$.

证明留作练习.

注 易证,关系"$\ll$"具有反身性(即 $\mu\ll\mu$)与传递性(即若 $\mu_1\ll\mu_2$ 且 $\mu_2\ll\mu_3$,则 $\mu_1\ll\mu_3$).设 μ 与 ν 为$(X,\mathscr{A})$上的两个广义测度,若成立 $\nu\ll\mu$ 且 $\mu\ll\nu$,则称 μ 与 ν 是等价的,记为 $\mu\equiv\nu$.

5.4.3 Radon-Nikodym 定理

引理 3 设 μ 与 ν 均为$(X,\mathscr{A})$上的有限测度,$\nu\ll\mu$ 且 $\nu(X)>0$,则存在 $\varepsilon>0$ 与 $A\in\mathscr{A}$,使得 $\mu(A)>0$ 且 A 是关于广义测度$(\nu-\varepsilon\mu)$的正定集.

证 令 $\nu_n:=\nu-\frac{1}{n}\mu$,则 ν_n 为$(X,\mathscr{A})$上的有限广义测度,于是关于 ν_n 存在 Hahn 分解 $X=E_n\cup(E_n)^c$,其中 E_n 为ν_n 正定集,$(E_n)^c$ 为ν_n 负定集($n=$

1,2,⋯). 记

$$E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \left(E^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)^c\right),$$

则 $E^c \subset (E_n)^c (n=1,2,\cdots)$. 由于 $(E_n)^c$ 为 ν_n- 负定集,因此

$$\nu(E^c) - \frac{1}{n}\mu(E^c) = \nu_n(E^c) \leqslant 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

因为 ν 是测度,所以上式等价于

$$0 \leqslant \nu(E^c) \leqslant \frac{1}{n}\mu(E^c) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

令 $n \to \infty$,注意到 μ 有限,得 $\nu(E^c)=0$. 由 $\nu(X)>0$,可知 $\nu(E)>0$. 再由 $\nu \ll \mu$,即知 $\mu(E)>0$.
于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geqslant \mu(E) > 0,$$

由此可知,存在 $N \in \mathbf{N}$ 使得 $\mu(E_N)>0$. 取 $A=E_N$ 以及 $\varepsilon = \frac{1}{N}$,即得所证.

定理 5.4.3 (Radon-Nikodym) 设 ν 与 μ 分别为 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限广义测度与 σ 有限测度. 若 $\nu \ll \mu$,则存在 X 上 μ-a.e. 有限的可测函数 f,使得

$$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu, E \in \mathscr{A}.$$

且 f 在 μ 等价的意义下是惟一的(即若同时有 g 使得 $\nu(E)=\int_E g \mathrm{d}\mu (E \in \mathscr{A})$,则 $f(x)=g(x)$ μ- a.e. 于 X).

证 若 $\nu(E)=0 (E \in \mathscr{A})$,则取 $f=0$ 即为所求. 下设 ν 不恒为零.

由于本定理的证明比较冗长,因此先交待一下论证的基本思路. 由 ν 与 μ 均为 σ 有限的条件,一般总首先假定 ν 与 μ 均为有限(其理由见下述第三步证明). 在此假设下,若证得定理中所述的 f 的存在性,则由 ν 有限可知 $f \in L(X;\mu)$,再由定理 5.1.6(12)即得惟一性. 又由引理 2:“$\nu \ll \mu$”$\Leftrightarrow$“$\nu^+ \ll \mu$ 且 $\nu^- \ll \mu$”,我们可进一步假定 ν 与 μ 均为有限测度. 以下的证明,就是基于此想法分三步进行.

第一步. 设 ν 与 μ 均为有限测度.

令

$$\mathscr{F} := \left\{ f \mid f \text{ 在} X \text{ 上非负 } \mathscr{A} \text{ 可测,且对任一 } E \in \mathscr{A} \text{ 均有} \int_E f \mathrm{d}\mu \leqslant \nu(E) \right\}.$$

因 $f=0\in\mathscr{F}$,故 $\mathscr{F}\neq\varnothing$,于是

$$\sup_{f\in\mathscr{F}}\left\{\int_X f\mathrm{d}\mu\right\}\leqslant\nu(X)<+\infty,$$

且存在 $f_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu=\sup_{f\in\mathscr{F}}\left\{\int_X f\mathrm{d}\mu\right\}.$$

令

$$g_n:=\sup_{1\leqslant k\leqslant n}\{f_k\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 g_n 在 X 上非负可测,且必存在 $E_k^{(n)}\in\mathscr{A}(k=1,2,\cdots,n)$使得

$$E_i^{(n)}\cap E_j^{(n)}=\varnothing(i\neq j),X=\bigcup_{k=1}^{n}E_k^{(n)},$$

$$g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\chi_{E_k^{(n)}}(x),x\in X\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是

$$\int_E g_n\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_{E\cap E_k^{(n)}}f_k\mathrm{d}\mu\leqslant\sum_{k=1}^{n}\nu(E\cap E_k^{(n)})$$

$$=\nu(E),E\in\mathscr{A}\quad(n=1,2,\cdots).$$

此即说明 $g_n\in\mathscr{F}$.

再令 $f:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n\}$,则 f 在 X 上非负可测,且 $0\leqslant g_n(x)\uparrow f(x)(x\in X)$,于是由 Levi 定理知 $f\in\mathscr{F}$,且

$$\alpha:=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X f\mathrm{d}\mu$$

(事实上由 $f\in\mathscr{F}$ 可知 $\int_X f\mathrm{d}\mu=\alpha$).

现证上述所得的 f 即为所求.注意到 $f\in\mathscr{F}$,即 $0\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu\leqslant\nu(E)(E\in\mathscr{A})$;同时由 $\nu(X)<+\infty$ 知 $f\in L(X,\mu)$,则 $f(x)$在 X 上 μ-a.e.有限.令

$$\nu_0(E):=\nu(E)-\int_E f\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A},$$

则 ν_0 显然为$(X,\mathscr{A})$上的测度,且由 $\nu\ll\mu$ 知 $\nu_0\ll\mu$,又由 $\nu_0(X)\leqslant\nu(X)<+\infty$知 ν_0 为有限测度.下证:ν_0 在 $\mathscr{A}$ 上恒为零(由此即得 $\int_E f\mathrm{d}\mu=\nu(E)$

$(E\in\mathscr{A})$),这等价于 $\nu_0(X)=0$(因为 ν_0 是测度). 用反证法,如若不然,则由引理 3 知,则存在 $\varepsilon>0$ 与 $A\in\mathscr{A}$,使得 $\mu(A)>0$ 且 A 是$(\nu_0-\varepsilon\mu)$-正定集,即

$$\varepsilon\mu(E\cap A)\leqslant\nu_0(E\cap A)=\nu(E\cap A)-\int_{E\cap A}f\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A},$$

亦即

$$\varepsilon\mu(E\cap A)+\int_{E\cap A}f\mathrm{d}\mu\leqslant\nu(E\cap A),E\in\mathscr{A}.$$

令 $g=f+\varepsilon\chi_A$,则 g 为 X 上的非负可测函数,且对于任一 $E\in\mathscr{A}$,有

$$\int_E g\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu+\varepsilon\mu(E\cap A)=\int_{E\setminus A}f\mathrm{d}\mu+\int_{E\cap A}f\mathrm{d}\mu+\varepsilon\mu(E\cap A)$$

$$\leqslant\int_{E\setminus A}f\mathrm{d}\mu+\nu(E\cap A)\leqslant\nu(E\setminus A)+\nu(E\cap A)=\nu(E),$$

因此 $g\in\mathscr{F}$. 但另一方面,

$$\int_X g\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu+\varepsilon\mu(A)\geqslant\alpha+\varepsilon\mu(A)>\alpha,$$

这与 α 的定义相矛盾.

在目前的假定下,"惟一性"如本证明开始所述,故略.

第二步. 设 ν 为有限广义测度,μ 为有限测度.

由 Jordan 分解知,$\nu=\nu^+-\nu^-$,且 ν^+ 与 ν^- 均为有限测度. 又由引理 2 知,$\nu^+\ll\mu$ 且 $\nu^-\ll\mu$. 于是由上述第一步所证之结论可知,存在 $\varphi,\psi\in L(X,\mu)$,使得

$$\int_E\varphi\mathrm{d}\mu=\nu^+(E),\int_E\psi\mathrm{d}\mu=\nu^-(E),E\in\mathscr{A}.$$

令 $f:=\varphi-\psi$,则 $f\in L(X,\mu)$,且成立

$$\nu(E)-\nu^+(E)-\nu^-(E)=\int_E\varphi\mathrm{d}\mu-\int_E\psi\mathrm{d}\mu$$

$$=\int_E(\varphi-\psi)\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

如前所述,"惟一性"的证明略.

在下一步证明之前,我们指出:在 μ 等价的意义下,$\varphi=f^+$,$\psi=f^-$(参见习题 5.46).

第三步．设 ν 为 σ 有限广义测度，μ 为 σ 有限测度．

注意到广义测度具有性质："若 $E,F\in\mathscr{A}$，$E\subset F$ 且 $\nu(F)<+\infty$，则 $\nu(E)<+\infty$"，于是由 ν 与 μ 均为 σ 有限易知，存在两两不交的 $\mathscr{A}$ 可测集列 (E_n)，使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 且同时满足：

$$|\nu(E_n)|<+\infty,\mu(E_n)<+\infty \quad (n=1,2,\cdots).$$

令

$$\nu_n(E):=\nu(E_n\cap E),\mu_n(E):=\mu(E_n\cap E),E\in\mathscr{A} \quad (n=1,2,\cdots),$$

则 ν_n 与 $\mu_n(n=1,2,\cdots)$ 分别为有限广义测度与有限测度．

对于任一 $n\in\mathbf{N}$，若 $\mu_n(E)=0$，即 $\mu(E_n\cap E)=0$，则由 $\nu\ll\mu$ 可知 $\nu_n(E)=\nu(E_n\cap E)=0$，即得 $\nu_n\ll\mu_n$．于是由第二步所证之结论可知，存在 $f_n\in L(X,\mu_n)$ 使得

$$\nu_n(E)=\int_E f_n\mathrm{d}\mu_n=\int_{E_n\cap E}f_n\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

（第二个等式成立的理由，参见习题 5.47.）注意到

$$\int_{E_n\cap E}f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f_n\chi_{E_n}\mathrm{d}\mu,$$

即知 $f_n\chi_{E_n}\in L(X,\mu)$.

再令 $f:=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\chi_{E_n}$，由 $E_n\in\mathscr{A}$ 两两不交（则 $f\chi_{E_n}=f_n\chi_{E_n}$）且 $f_n\chi_{E_n}\in L(X,\mu)$（则在 X 上 μ-a.e. 有限）易知，f 为 X 上的 μ-a.e. 有限的可测函数，且

$$f^-=\sum_{n=1}^{\infty}(f_n)^-\chi_{E_n},f^-\chi_{E_n}=(f_n)^-\chi_{E_n},$$

结合上述第二步所得的结论，则有

$$(\nu_n)^-(E)=\int_E(f_n)^-\mathrm{d}\mu_n=\int_E f^-\chi_{E_n}\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

注意到，由定理 5.4.1(2) 证明中的广义测度的下变差的定义可得 $(\nu_n)^-(X)=\nu^-(E_n)$．于是，由

$$+\infty>\nu^-(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu^-(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_n)^-(X)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f^- \chi_{E_n} \mathrm{d}\mu = \int_X f^- \mathrm{d}\mu,$$

即知 f 在 X 上关于测度 μ 的积分存在．从而推得

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(E) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\chi_{E_n}\mathrm{d}\mu$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f\chi_{E_n}\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu, E \in \mathscr{A}.$$

最后，由 f_n 在 μ_n 等价意义下是惟一的，可知 $f_n\chi_{E_n}$ 在 μ 等价意义下是惟一的，由此即知 $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\chi_{E_n}$ 在 μ 等价意义下是惟一的．(详细说明留给读者完成．)

至此定理证毕．

注 Radon-Nikodym 定理结论中的等式

$$\nu(E) = \int_E f\mathrm{d}\mu, E \in \mathscr{A},$$

也记作

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}, \text{或 } \mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu,$$

并称 f 为 Radon-Nikodym 导数．

附注 为了今后在泛函分析中的应用，我们给出以下概念，以此结束本章．

定义 1 设 $(X,\mathscr{A})$ 为可测空间，$f:X\to\mathbf{C}$，记 $f = u + \mathrm{i}\nu$，其中 $u,\nu:X\to\mathbf{R}$，若 u 与 ν 均为 $\mathscr{A}$ 可测函数，则称 f 为 $\mathscr{A}$ 复值可测函数．又设 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的测度，若 u 与 ν 均在 $E\in\mathscr{A}$ 上积分存在(或可积)，则称 f 在 E 上积分存在(相应地，可积)，且定义

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E u\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_E \nu\mathrm{d}\mu.$$

请读者自行考察一下，以前讨论的拓广实值可测函数及其积分中，哪些性质与定理对于复值可测函数仍然成立．例如：复值可测函数 $f\in L(E)$ 当且仅当 $|f|\in L(E)$，且此时成立

$$\left|\int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\mathrm{d}\mu.$$

定义 2　设$(X,\mathscr{A})$为可测空间,如果集合函数

$$\nu:\mathscr{A}\to\mathbf{C}$$

满足:若(E_n)为$\mathscr{A}$中两两不交的序列,则

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n),$$

那么就称ν是$(X,\mathscr{A})$上的一个复测度.

注意,若ν为复测度(或有限(广义)测度),则$\nu(\varnothing)=0$可由ν满足的可列可加性推得.

可以类似地给出复测度的绝对连续的概念,不再赘述.

我们在此特别指出,Radon-Nikodym 定理条件中的ν为复测度时,定理结论仍然成立,当然定理结论中的f为复值μ-可积函数.

习　题

1. 设在 Cantor 集P上定义函数$f(x)=0$,而在$[0,1]\setminus P$中长为$1/3^n$的区间上定义为$n(n=1,2,\cdots)$. 试求:$\int_{[0,1]}f\mathrm{d}m$.

2. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,f为X上的非负可测函数,令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & 若\ f(x)\leqslant n,\\ 0, & 若\ f(x)>n,\end{cases}\quad x\in X\quad(n=1,2,\cdots).$$

试问:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu$成立否?

3. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,(f_n)为E上非负可测函数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=0$. 证明:$f_n\Rightarrow 0$于$E$.

4. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$且$\mu(E)<+\infty$,(f_n)为E上 a.e.有限可测函数列. 证明:$f_n\Rightarrow 0$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\mathrm{d}\mu=0$.

5. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$,φ为非负可测函数,定义集合函数ν:

$$\nu(E)=\int_E\varphi\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

证明:ν为$\mathscr{A}$上的一个测度,且对任一非负可测函数f,成立

$$\int_E f\mathrm{d}\nu=\int_E f\varphi\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A}.$$

6. 设$g(x)=\chi_{[0,+\infty)}(x)$,$x\in\mathbf{R}$,$E$为$\mathbf{R}$中的区间,$f$为$\mathbf{R}$上的 Borel 可测函数,试求:$\int_E f\mathrm{d}m_g$.

7. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，$f\in L(E)$，$E_n=E(|f|\geqslant n)\quad(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\mu(E_n)=0$.

8. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，$E\in\mathscr{A}$，$f\in L(E)$，且对于任一有界可测函数φ，都有

$$\int_E f\cdot\varphi\mathrm{d}\mu=0.$$

证明：$f=0$ a.e. 于E.

9. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为σ有限测度空间，f,g为可测函数，且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int_E g\mathrm{d}\mu,E\in\mathscr{A},$$

证明：$f(x)=g(x)$ a.e. 于X.

10. 设$f\in L(\mathbf{R},m)$，令

$$F(x)=\int_{(-\infty,x]}f\mathrm{d}m(x\in\mathbf{R}),$$

证明：对于任一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于$\mathbf{R}$中任意有限个互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$当其总长度$\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$时，必有

$$\sum_k|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon.$$

（注：上述结论的叙述即为"F为$\mathbf{R}$上的绝对连续函数"的定义.）

11. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，f为X上的可测函数，$E_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$. 证明：

(1)若$E_n\uparrow E$，且$\int_E f\mathrm{d}\mu$存在，则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu;$$

(2)若$E_n\downarrow E$，且$f\in L(E_1)$，则

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu.$$

12 (Jensen 不等式). 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，$\mu(X)=1$，$f\in L(X)$且$f(X)\subset(a,b)$，φ为(a,b)中的凸函数，证明：

$$\varphi\left(\int_X f\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\int_X(\varphi\circ f)\mathrm{d}\mu$$

（其中$-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$）.

13. 利用12题的结果，证明：

(1) $\prod\limits_{k=1}^n e^{\alpha_k t_k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k e^{t_k}$（其中$\sum\limits_{k=1}^n\alpha_k=1,\alpha_k>0,t_k\in\mathbf{R}(k=1,\cdots,n)$）；

(2)（Young 不等式）$A\cdot B\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$（其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p\in(1,+\infty),A,B>0$）.

14(Hölder 不等式). 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间，f与g为X上的可测函数，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$

$=1$,证明:

(1) $\int_X |f\cdot g|\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}, p\in(1,+\infty)$;

(2) $\int_X |f\cdot g|\mathrm{d}\mu\geqslant\left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}, p\in(0,1)$.

15(Minkowski 不等式). 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,f与g为X上的可测函数,证明:

(1) $\left(\int_X |f+g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X |g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, p\in[1,+\infty)$;

(2) $\left(\int_X (|f|+|g|)^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X |g|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, p\in(0,1)$.

16. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为有限测度空间,φ为有限可测函数,令

$$g(x)=\mu(\varphi^{-1}(-\infty,x]), x\in\mathbf{R},$$

证明:(1) $m_g(B)=\mu(\varphi^{-1}(B)), B\in\mathscr{B}$;

(2) $\int_{\mathbf{R}} f\mathrm{d}m_g=\int_X f\circ\varphi\mathrm{d}\mu, f\in L(\mathbf{R},m_g)$.

17. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$, $f_n\in L(E)(n=1,2,\cdots)$,且$\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu<+\infty$. 证明:

(1) 存在可测函数f,使得$\sum_{n=1}^{\infty}f_n=f$ a.e. 于E;

(2) $f\in L(E)$,且有$\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu$.

18. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,(E_n)为单调增可测集列,X上的可测函数f在每一$E_n(n=1,2,\cdots)$上可积,且$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}|f|\mathrm{d}\mu<+\infty$,记$E=\lim\limits_{n\to\infty}E_n$. 证明:$f\in L(E)$,且有

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f\mathrm{d}\mu.$$

19. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一完备测度空间,$E\in\mathscr{A}$, $f_n(n=1,2,\cdots)$为E上a.e.有限可测函数,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.e.于E,且存在常数K,使得

$$\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu<K\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明:$f\in L(E)$.

20. 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,$E\in\mathscr{A}$, $f,f_n\in L(E)(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ a.e.于E,且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n|\mathrm{d}\mu=\int_E |f|\mathrm{d}\mu.$$

证明:在任意可测子集$e\subset E$上,

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int_e |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

21. 设由[0,1]中取出 n 个 L 可测子集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，假定[0,1]中任一点至少属于这 n 个集中的 q 个．证明：存在 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $mE_k\geqslant q/n$.

22. 设 $f\in L(\mathbf{R},m)$，则存在 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的连续函数列 (g_n) 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} |f-g_n|\,\mathrm{d}m = 0.$$

23. 设 $f\in L([a,b],m_g)$，证明：对于任一 $\varepsilon>0$，存在多项式 P，使得

$$\int_{[a,b]} |f-P|\,\mathrm{d}m_g < \varepsilon.$$

24. 设 $f\in L(\mathbf{R},m)$，I 为 $\mathbf{R}$ 中的区间，证明：

$$\lim_{t\to+\infty}(L)\int_I f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x = 0.$$

25. 设 $f\in L([0,1],m_g)$，且对任一 $c\in[0,1]$，总有

$$\int_{[0,c]} f\,\mathrm{d}m_g = 0,$$

证明：$f(x)=0$ m_g-a.e. 于[0,1].

26. 试从 $\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$，$x\in(0,1)$，证明：

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

27. 证明：$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}\ (p>-1)$.

28. 计算(需说明运算的合理性)：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{x}\,(1+x/n)^n}\,\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

29. 设 $f(x,t)$ 当 $|t-t_0|<\delta$ 时为 x 的在$[a,b]$上的 R 可积函数，又有常数 K，使得

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant K,\ a\leqslant x\leqslant b,\ |t-t_0|<\delta.$$

证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'_t(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

30. 设 $(X,\mathscr{A}_X)$ 与 $(Y,\mathscr{A}_Y)$ 为两个可测空间，令

$$\mathscr{C} = \{A\times B \mid A\in\mathscr{A}_X, B\in\mathscr{A}_Y\},$$

证明:$\mathbf{K}(\mathscr{C})$是由可表为$\mathscr{C}$中有限个两两不交的元素之并集全体所成之集族.

31. 设$f(x)$在$\mathbf{R}^p$上L可积,$g(y)$在$\mathbf{R}^q$上L可积.证明:$f(x)g(y)$在$\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$上$L$可积,且

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q} f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^p} f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{\mathbf{R}^q} g(y)\mathrm{d}y.$$

32. 设$D=[0,1]\times[0,1]$,定义$f:D\to\mathbf{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot y}{(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\quad (x,y)\in E.$$

证明:f的两个累次积分存在且相等,但f在D上不L可积.

33. 计算二重级数$\sum\limits_{n,k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{n^k}$(需说明运算的合理性).

34. 试由$\dfrac{1}{x}=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\,(x>0)$,计算积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$(需说明运算的合理性).

35. 设$E\subset\mathbf{R}^2$,且对于任意的$x,y\in\mathbf{R}$,均有$m(E_x)=m((E^y)^c)=0$,证明:E不是$\mathscr{L}\times\mathscr{L}$可测集.

36. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,$E,F\in\mathscr{A},E\subset F$.证明:若$\nu(F)<+\infty$,则$\nu(E)<+\infty$.

37. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,(E_n)为两两不交可测集列.证明:若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)<+\infty$,则此级数必绝对收敛.

38. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,$E,E_n\,(n=1,2,\cdots)$为ν正(负)定集,证明:对于任一$F\in\mathscr{A}$,$E\cap F$,$E\setminus F$以及$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$均为$\nu$正(负)定集.

39. 举例说明:存在$(X,\mathscr{A})$及其上的广义测度ν,使得X关于ν的Hahn分解不惟一.

40. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的σ有限广义测度,$X=E\cup E^c$为关于ν的Hahn分解,其中E与E^c分别为ν正定集与ν负定集,令

$$\nu^+(A)=\nu(A\cap E),\nu^-(A)=-\nu(A\cap E^c),A\in\mathscr{A},$$

证明:$\nu=\nu^+-\nu^-$,其中ν^+为$(X,\mathscr{A})$上的σ有限测度,ν^-为$(X,\mathscr{A})$上的有限测度.

41. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,$X=E\cup E^c=F\cup F^c$为关于ν的两个不同的Hahn分解,其中E,F为ν正定集,E^c,F^c为ν负定集.证明:

$$\nu(A\cap E)=\nu(A\cap F),\nu(A\cap E^c)=\nu(A\cap F^c),A\in\mathscr{A}.$$

42. 设ν为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,证明:$|\nu(A)|\leqslant|\nu|(A)\ (A\in\mathscr{A})$,且举例说明严格不等式成立.

43. 设μ与ν均为$(X,\mathscr{A})$上的广义测度,证明下述三条件相互等价:

(1)$\nu\ll\mu$;

(2)$\nu^+\ll\mu$且$\nu^-\ll\mu$;

(3)$|\nu|\ll|\mu|$.

44. 设 ν 与 μ 均为 $(X,\mathscr{A})$ 上的广义测度，且 ν 有限，证明：$\nu \ll \mu$ 的充要条件是对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $A\in\mathscr{A}$ 且 $|\mu|(A)<\delta$ 时，恒有 $|\nu|(A)<\varepsilon$.

45. 设 ν 与 $\nu_k(k=1,2,3)$ 均为 $(X,\mathscr{A})$ 上的广义测度，证明：

(1) $\nu \ll \nu$；

(2) 若 $\nu_1 \ll \nu_2$ 且 $\nu_2 \ll \nu_3$，则 $\nu_1 \ll \nu_3$.

46. 设 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的测度，$f\in L(X,\mu)$，令

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu, E\in\mathscr{A}.$$

证明：(1) ν 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的有限广义测度；

(2) $\nu^+(E)=\int_E f^+\mathrm{d}\mu, \nu^-(E)=\int_E f^-\mathrm{d}\mu, |\nu|(E)=\int_E |f|\mathrm{d}\mu, E\in\mathscr{A}.$

47. 设 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的测度，$E_0\in\mathscr{A}$，$f\in L(X,\mu)$，令

$$\mu_0(E)=\mu(E_0\cap E), E\in\mathscr{A},$$

证明：$f\in L(X,\mu_0)$，且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu_0=\int_{E_0\cap E} f\mathrm{d}\mu, E\in\mathscr{A}.$$

第六章　赋范线性空间

§6.1　基本概念

(1) 设 X 是一个加法群, F 是一个域. 如果存在由 $F\times X$ 到 X 中的映射满足

$$
\begin{aligned}
&(\alpha,\ x)\to \alpha x,\ \alpha\in F, x\in X, && \\
&\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y, && \alpha\in F,\ x,\ y\in X;\\
&(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x, && \alpha,\ \beta\in F, x\in X;\\
&\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x, && \alpha,\beta\in F,\ x\in X;\\
&1x=x, && 1\in F,\ x\in X,
\end{aligned}
$$

则称 X 为域 F 上的一个线性空间(或向量空间), X 中的元素也称为向量.

(2) 如果(1)中的 $F=\mathbf{C}$ 或 $\mathbf{R}$, 同时存在由 X 到 $\mathbf{R}$ 中的映射 $\|\cdot\|$:

$$x\to\|x\|,\ x\in X,$$

满足

(i) $\|x\|\geqslant 0\quad(x\in X)$, 且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;

(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|\quad(\alpha\in F,\ x\in X)$;

(iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\quad(x,\ y\in X)$,

则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间(在不引起混淆的情形下,也直接称 X 为赋范线性空间), 映射 $\|\cdot\|$ 称为范数.

(3) 设 X 为一赋范线性空间, 令

$$d(x,\ y):=\|x-y\|\quad(x,\ y\in X),$$

则 d 是 X 上的一个距离, 称之为相应于范数 $\|\cdot\|$ 的距离, 或称为由范数 $\|\cdot\|$ 导出的距离.

完备的赋范线性空间称为 Banach 空间.

以后, 当论及赋范线性空间上的距离时都是指上述定义的距离. 于是有

$$x_n\to x:=\|x_n-x\|\to 0,$$

并称 (x_n)(依范数)收敛于 x.

注 由范数的定义易知有下列性质：

(i) 范数 $\|x\|$ 是 x 的连续函数，即若 $x_n \to x$，则 $\|x_n\| \to \|x\|$；

(ii) 若 $x_n \to x$，$y_n \to y$，则 $x_n + y_n \to x + y$；

(iii) 若 $\alpha_n \to \alpha$，$x_n \to x$，则 $\alpha_n x_n \to \alpha x$.

性质(ii)，(iii)表明，线性运算关于 X 中的收敛概念是连续的，亦称之为范数与线性运算的相容性.

(4) 设 Y 是线性空间 X 的一个非空子集. 如果 Y 关于 X 中的线性运算自成一线性空间(即若 $x, y \in Y$，$\alpha \in F$，则 $x + y$，$\alpha x \in Y$)，那么 Y 称为 X 的(线性)子空间.

(5) 设 M 为线性空间 X 的一个非空子集，M 中任意有限个向量的线性组合全体所成之集记为 $\mathrm{span}M$，且称之为由 M 张成的线性包(或线性流形). 易知，$\mathrm{span}M$ 是 X 的线性子空间，且是 X 中包含 M 的最小线性子空间.

(6) 设 M 为线性空间 X 的一个子集，若 M 中任意有限个向量都线性无关，则称 M 是 X 中的线性无关集；又若 $\mathrm{span}M = X$，则称 M 为 X 的 Hamel 基(或线性基)；又若 $\overline{\overline{M}} < \aleph_0$，则称 X 为有限维线性空间，且用 $\dim X < \infty$ 表示有限维；否则称 X 为无限维线性空间，用 $\dim X = \infty$ 表示无限维. 若 $X = \{0\}$，则称 X 为零维线性空间.

(7) 设 X 为无限维赋范线性空间，(e_n) 为 X 中点列，若 X 中的任一元素 x 可惟一地表为 $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$，$\xi_n \in F$(此级数当依 X 中范数收敛)，则称 (e_n) 为 X 的一个 Schauder 基.

易知，若赋范线性空间 X 具有 Schauder 基，则 X 可分.

(8) 设 Y 为赋范线性空间 X 的一个线性子空间，Y 按 X 的范数显然为一赋范线性空间. 如果 Y 按此范数导出的距离在 X 中是闭的，则称 Y 是 X 的闭子空间.

(9)设 $(X_1, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X_2, \|\cdot\|_2)$ 为两个赋范线性空间，若存在 X_1 到 X_2 上的保范线性同构(映射) T，即

1° T 是 X_1 到 X_2 上的双射，使得

$$T(x + y) = Tx + Ty,\ x,\ y \in X_1,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx,\ x \in X_1,\ \alpha \in F;$$

2° T 是保范的：

$$\|Tx\|_2 = \|x\|_1,\ x \in X_1,$$

则称 X_1 和 X_2 为保范线性同构，简称为同构.

(10) 我们不加证明地给出如下的有关赋范线性空间的完备化定理:

对于任一赋范线性空间 X,都存在 Banach 空间 $\widetilde{X}$,使得 X 与 $\widetilde{X}$ 的某一稠密子空间同构,且在同构意义下,$\widetilde{X}$ 是惟一的(称 $\widetilde{X}$ 为 X 的完备化).

注 可以运用类似于 Cauchy 从有理数定义等价类来构造实数的方法证明上述完备化定理,由于论证过程过于冗长,故证略.需要指出的是,在定理 2.2.11 中我们曾经给出了度量空间完备化的存在性证明,但它并不适合目前的情形.然而,当时所用到的"嵌入"的思想还是有着根本的重要性.当我们学习了 Hahn-Banach 泛函延拓定理以及有关自然(典则)映射的概念后,本定理的成立将是显而易见的,这是后话.

§6.2 Banach 空间举隅

6.2.1 L^p 空间

在以后的章节中,若无特别的说明,所涉及的函数一般均为复值函数,不再一一指出.

定理 6.2.1 设 $p\in[1,+\infty)$,L^p 表示测度空间$(X,\mathscr{A},\mu)$上使得 $|f|^p$ 可积的可测函数 f 全体所成之集,且将 a.e. 相等的函数视为同一元,在 L^p 中引进通常的函数的线性运算,定义

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},\ f\in L^p,$$

则$(L^p,\ \|\cdot\|_p)$为 Banach 空间.

(**注** 若拓广实值可测函数 f 满足 $|f|^p\in L(X)$,则 $f(x)$在 X 上 a.e. 有限,而由于在 L^p 中,我们将 a.e. 相等的函数视为同一元,由此总可认为 f 为(有限)实值可测函数,而实值函数当然可视作复值函数;特别地,若线性空间的数域 $F=\mathbf{C}$,则我们总是认定 f 为复值函数.)

证 (1)设 $f,\ g\in L^p$,$\alpha\in\mathbf{C}$,则显然有 $\alpha f\in L^p$,且由 Minkowski 不等式可知 $f+g\in L^p$,此即说明 L^p 为(复)线性空间.

(2) 由 $\|\cdot\|_p$ 的定义,显然有: $\|f\|_p\geqslant 0$, $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\ \|f\|_p$ $(f\in L^p,\ \alpha\in\mathbf{C})$,由于在 L^p 中将 a.e. 相等的函数视为同一元,因此 $\|f\|_p=0\Leftrightarrow f=0$;又由 Minkowski 不等式即知 $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ 成立.此即说明 $\|\cdot\|_p$ 确是线性空间的范数.

(3) 下证赋范线性空间 L^p 的完备性.设(f_n)为 L^p 中的 Cauchy 点列,则存在子列(f_{n_k})满足

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_p < \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

由 Minkowski 不等式(结合归纳法)可知

$$\left\| |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right\|_p \leqslant \| f_{n_1} \|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \| f_{n_{j+1}} - f_{n_j} \|_p$$

$$\leqslant \| f_{n_1} \|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} \leqslant \| f_{n_1} \|_p + 1 = M \quad (k = 2, 3, \cdots),$$

即

$$\int_X \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^p \mathrm{d}\mu \leqslant M^p \quad (k = 2, 3, \cdots),$$

令 $k \to \infty$,由 Levi 定理得

$$\int_X \left(|f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \right)^p \mathrm{d}\mu \leqslant M^p < +\infty.$$

记

$$F := |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|,$$

则 $F \in L^p$,于是 $F(x) < +\infty (x \in X)$,从而存在有限值可测函数 f,使得

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \to f(x), \ x \in X.$$

注意到,由 $|f_{n_k}(x)|^p \leqslant |F(x)|^p$ 可知 $|f(x)|^p \leqslant |F(x)|^p (x \in X)$,因此 $f \in L^p$;又由于 $|f_{n_k}(x) - f(x)|^p \leqslant 2^p |F(x)|^p (x \in X)$,由控制收敛定理即得 $\| f_{n_k} - f \|_p \to 0$. 此即说明 Cauchy 点列 (f_n) 中存在子列 (f_{n_k}) 在 L^p 中(依范数 $\| \cdot \|_p$)收敛于 f,由此易知必有 $\| f_n - f \|_p \to 0$.

定理证毕.

注 1°易证,若 $\| f_n - f \|_p \to 0$,则在 X 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$,从而存在 (f_{n_k}) 使得 $f_{n_k}(x) \to f(x)$ a.e. 于 X. 但是,即使 $\mu(X) < +\infty$, $f_n(x) \to f(x)$ $(x \in X)$,也不能保证 $\| f_n - f \|_p \to 0$. 例如:设 $X = [0, 1]$, $\mu = m$, $f_n = \mathrm{e}^n \chi_{(0, 1/n)}$,则 $f_n(x) \to 0 (x \in \mathbf{R})$,但是对于任一 $p \in [1, +\infty)$,均有

$$\int_0^1 |f_n|^p \mathrm{d}m = \int_0^{1/n} \mathrm{e}^{pn} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \mathrm{e}^{pn} \to +\infty \quad (n \to \infty).$$

2° 运用与定理 5.2.1 类似的证明方法,我们可得如下结论. 若 $p\in[1,+\infty)$,则 $\mathbf{R}$ 上具有紧支集的连续函数的全体 $\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$在 $L^p(\mathbf{R})$中稠密;特别地,$C[a,b]$在 $L^p[a,b]$中稠密. 这就是说,当 $p\in[1,+\infty)$时,$L^p(\mathbf{R})$是赋予$\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$以 L^p(范数导出的)距离所得的度量空间的完备化;特别地,当 $p=1$ 时,即表明在完备化的意义下 Lebesgue 积分确是 Riemann 积分的推广.

6.2.2 L^∞空间

定义 6.2.1 设$(X,\mathscr{A},\mu)$为一测度空间,f 为 X 上的可测函数,若存在 μ-零测集 E 使得$f(x)$在 E^c 上有界,则称 f 是X 上(关于测度 μ)的本性有界可测函数. X 上的(关于测度 μ)本性有界可测函数全体所成之集记为 $L^\infty(X,\mu)$. 定义

$$\|f\|_\infty := \inf_E\{\sup_{x\in E^c}|f(x)|\mid \mu(E)=0\}\left(=ess\sup_{x\in X}|f(x)|\right),$$

则称$\|f\|_\infty$为 f 的本性最大模.

引理 1 若 $f\in L^\infty(X,\mu)$,则存在 μ 零测集E_0 使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E_0^c}\{|f(x)|\}.$$

引理的证明留作练习.

引理 2 若 $f,g\in L^\infty(X,\mu)$,则$\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

证 由引理 1,存在 μ-零测集 E_1 与 E_2 使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E_1^c}\{|f(x)|\},\quad \|g\|_\infty=\sup_{x\in E_2^c}\{|g(x)|\},$$

于是有

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty+\|g\|_\infty &\geqslant \sup_{x\in(E_1\cup E_2)^c}\{|f(x)|\}+\sup_{x\in(E_1\cup E_2)^c}\{|g(x)|\}\\ &\geqslant \sup_{x\in(E_1\cup E_2)^c}\{|f(x)+g(x)|\}\geqslant\|f+g\|_\infty.\end{aligned}$$

定理 6.2.2 L^∞表示测度空间$(X,\mathscr{A},\mu)$上本性有界可测函数全体所成之集,且将 a.e. 相等的函数视为同一元,在 L^∞ 中引进通常的函数的线性运算,则$(L^\infty,\|\cdot\|_\infty)$为 Banach 空间.

证 (1)由于有限个零测集之并集仍是零测集,由此即知任意有限个本性有界可测函数的线性组合仍是本性有界可测函数,即 L^∞ 按通常的函数的线性运算成一线性空间.

(2) 说明$\|\cdot\|_\infty$确是线性空间 L^∞ 的范数.

由 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义,显然有:$\|f\|_\infty \geqslant 0$, $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty (f \in L^\infty, \alpha \in \mathbf{C})$;又由引理可知,如果 $\|f\|_\infty = 0$,那么存在 μ-零测集 E_0 使得 $\sup\limits_{x \in E_0^c}\{|f(x)|\} = 0$,注意到在 L^∞ 中将 a.e. 相等的函数视为同一元,因此 $f = 0$,即得 $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = 0$. 而引理 2 即说明范数的"三角不等式"成立.

(3) 说明赋范线性空间 $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 的完备性.

设 (f_n) 为空间 $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的 Cauchy 点列,若将 (f_n) 视作 $L^\infty(X, \mu)$ 中的函数列,记

$$A_k := \{x \mid |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty,\ x \in X\} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$B_{n,m} := \{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

$$(n, m = 1, 2, \cdots),$$

则 A_k 与 $B_{n,m}$ 均为 μ-零测集,从而 $E = (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m})$ 也是 μ-零测集. 此时,我们考虑 (f_n) 在 E^c 上的"限制函数列"(仍记作 (f_n)),则 (f_n) 即为完备度量空间 $B(E^c)$ 中的 Cauchy 点列,于是,存在 $f \in B(E^c)$ 使得

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in E^c}\{|f_n(x) - f(x)|\} \to 0.$$

再将 f 延拓为 X 上的函数(仍记作 f),补充定义 $f(x) = 0\ (x \in E)$,则 $f \in L^\infty(X, \mu)$. 现将与此 f 对应的空间 $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 中的元素仍记作 f,则有

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \sup_{x \in E^c}\{|f_n(x) - f(x)|\} \to 0,$$

即 (f_n) 在 L^∞ 中(依范数 $\|\ \|_\infty$)收敛.

定理证毕.

注 1° 综合定理 6.2.1 与定理 6.2.2 得:$L^p (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 为 Banach 空间,且有

Hölder 不等式:

$$\|f \cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q \quad \left(1 \leqslant p \leqslant +\infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right);$$

Minkowski 不等式:

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant +\infty)$$

成立.

2° 若 $X = \mathbf{N}$, $\mu = \mu_c$(计数测度),则习惯上记 L^p 为 l^p, l^p 中的元素可看

作一数列 $x=(\xi_n)$. 但需注意,l^p 中两个元素相等是处处相等,即$(\xi_n)=(\eta_n)$ $\Leftrightarrow \xi_n=\eta_n(n=1, 2, \cdots)$.

3° 特别需要指出的是:$\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$的 L^∞-完备化不是 $L^\infty(\mathbf{R}, m)$而是 $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$(此处,$\mathscr{C}_0(\mathbf{R}):=\{f\in C(\mathbf{R}) \mid \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0\}$).

6.2.3 有限维赋范线性空间

定理 6.2.3 设$(X, \|\cdot\|)$为一 n 维赋范线性空间,基为$\{e_1,\cdots,e_n\}$,$(\mathbf{C}^n, \|\cdot\|_E)$为 n 维复欧氏空间,则存在常数 $c_1, c_2>0$,使得对一切

$$x=\sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in X,\ \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in \mathbf{C}^n$$

成立

$$c_1\|\xi\|_E \leqslant \|x\| \leqslant c_2\|\xi\|_E.$$

注 若令 $m_1=\dfrac{1}{c_2}$, $m_2=\dfrac{1}{c_1}$,则定理结论为

$$m_1\|x\| \leqslant \|\xi\|_E \leqslant m_2\|x\|.$$

证 首先,令 $c_2=\left(\sum\limits_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,则 $c_2>0$,且

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^n |\xi_k|\,\|e_k\| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = c_2\|\xi\|_E.$$

其次,定义函数 $f:\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}$,

$$f(\xi)=\|x\|,\ x=\sum_{k=1}^n \xi_k e_k, \xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n.$$

又记

$$y=\sum_{k=1}^n \eta_k e_k,\ \eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{C}^n,$$

则由

$$|f(\xi)-f(\eta)|=|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|\leqslant c_2\|\xi-\eta\|,$$

即知 f 为 $\mathbf{C}^n$ 上的连续函数. 令

$$S:=\{\xi \mid \|\xi\|=1,\ \xi\in\mathbf{C}^n\},$$

则 S 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界闭集(从而为紧集). 注意到,$f(\xi)=0\Leftrightarrow\xi=0$, 因此 f 在

S 上取正值,进而有 $c_1=\min\limits_{\xi\in S}|f(\xi)|>0$. 对于任一 $x\in X$,由于 $x\neq0$ 当且仅当 x 所对应的 $\xi\neq0$,此时 $\frac{\xi}{\|\xi\|_E}\in S$, 于是

$$c_1\leqslant f\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_E}\right)=\frac{\|x\|}{\|\xi\|_E},$$

即 $c_1\|\xi\|_E\leqslant\|x\|$;又当 $x=0$ 时所得的不等式显然成立.

定理证毕.

定义 6.2.2 设 X,Y 为赋范线性空间,若存在 X 到 Y 上的拓扑同构映射 T,即 T 既是线性同构映射,又是一个同胚映射(即双方连续映射),则称 X 和 Y 为拓扑同构.

显然,保范线性同构是拓扑同构的特殊情况,而拓扑同构则是同胚的特殊情况.

定义 6.2.3 设 X 为一线性空间, $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 X 上的两个范数,若存在 $c_1, c_2>0$ 使得

$$c_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2,\ x\in X,$$

则称 X 上的范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

由此即可得到定理 6.2.3 的如下推论:

推论 1 任一 n 维赋范复(或实)线性空间必与 $\mathbf{C}^n$(或 $\mathbf{R}^n$)拓扑同构.

推论 2 任一有限维赋范线性空间必为 Banach 空间;任一赋范线性空间的有限维子空间必为 Banach 空间,因而必为闭子空间.

推论 3 有限维线性空间上的任何两个范数都是等价的.

引理(F.Riesz) 设 X 为赋范线性空间,E 为 X 的真闭子空间,则对于任一 $\varepsilon\in(0,1)$,存在 $x_0\in X$ 使得 $\|x_0\|=1$ 且

$$d(x_0,\ E)=\inf_{x\in E}\|x-x_0\|>\varepsilon.$$

证 因为 $E\neq X$,所以存在 $a\in E^c$;又因为 E 是闭集,所以 $d(a,\ E)>0$. 于是,由 $d(a,\ E)$的定义可知, 对于任一 $\varepsilon\in(0,1)$,存在 $b\in E$ 使得

$$0<\|a-b\|<\frac{d(a,\ E)}{\varepsilon}.$$

令 $x_0=\frac{a-b}{\|a-b\|}$,则 $\|x_0\|=1$,且有

$$\|x_0-x\|=\frac{1}{\|a-b\|}\|a-(b+\|a-b\|x)\|$$

$$\geqslant \frac{d(a,E)}{\|a-b\|} > \varepsilon,\ x \in E,$$

由此即得

$$d(x_0,E) \geqslant \frac{d(a,E)}{\|a-b\|} > \varepsilon.$$

定理 6.2.4 赋范线性空间 X 为有限维的充要条件是 X 为局部紧的(即 X 中的任一有界闭集是紧集,或 X 中的任一有界集是列紧集).

证 必要性.设 X 为 n 维赋范复线性空间,则 X 与 $\mathbf{C}^n$ 拓扑同构,令 T: $X \to \mathbf{C}^n$, $T(x)=\xi$(其中 ξ 为给定 X 的基下 x 所对应的坐标向量),则 T 为 X 到 $\mathbf{C}^n$ 上的拓扑同构映射.由拓扑同构映射的定义即知,T 将 X 中的任一有界闭集 A 映为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界闭集 $T(A)$;而 $\mathbf{C}^n$ 中的有界闭集必为紧集,于是 T^{-1} 又将 $\mathbf{C}^n$ 中的这一紧集 $T(A)$ 映为 X 中的紧集 A.由此即证得必要性.

充分性.令

$$S := \{X \mid \|x\| = 1,\ x \in X\},$$

则 S 为 X 中的有界闭集.若 $\dim X = \infty$,则取 $x_1 \in S$,且记 $E_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$,于是 E_1 为 X 的有限维子空间,从而为 X 的真闭子空间.由 Riesz 引理,

$$\exists x_2 \in (E_1)^c \cap S : d(x_2,\ x_1) \geqslant d(x_2,\ E_1) > \frac{1}{2},$$

记 $E_2 = \mathrm{span}\{x_1,\ x_2\}$,则同理

$$\exists x_3 \in (E_2)^c \cap S : d(x_3,\ x_k) \geqslant d(x_3,\ E_2) > \frac{1}{2}\ (k = 1,\ 2).$$

如此以往,由于假定 X 是无限维的,因此这一过程可一直进行下去,从而得到 S 上的点列 (x_n),满足 $d(x_i,\ x_j) > \frac{1}{2}(i \neq j)$,显然此 (x_n) 的任一子列均不收敛,此即说明 S 不是 X 中的紧集,由此完成了充分性的证明.

6.2.4 有界连续函数空间 $C(X)$

设 X 为一紧度量空间,$C(X)$ 表示 X 上的(有界)连续函数全体所成之集,在 $C(X)$ 中引进通常的函数的线性运算,且定义

$$\|f\| = \sup_{x \in X}\{|f(x)|\},\ f \in C(X),$$

则易知 $(C(X), \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间.

定理 6.2.5 (Arzela-Ascoli) 设 X 为一紧度量空间,则 A 为 $(C(X),$

$\|\cdot\|$)中列紧集的充要条件是:

(1) A(一致)有界,即存在 $M>0$ 使得对于任一 $f\in A$ 均有 $\|f\|\leqslant M$;

(2) A 等度连续,即对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对于 $x, y\in X$ 只要$d(x, y)<\delta$,则对一切 $f\in A$ 均有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

证 必要性.若 A 为$C(X)$中的列紧集,则必为完全有界集,进而必为有界集.下证 A 等度连续.由完全有界集的定义,对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $C(X)$中有限个开球 $B(f_k;\frac{\varepsilon}{3})(k=1,\cdots,m)$使得$\bigcup_{k=1}^{m}B(f_k;\frac{\varepsilon}{3})\supset A$.由于 X 为紧度量空间,则 f_k 在X 上一致连续,于是对上述的 ε,存在 $\delta>0$,对于 $x, y\in X$ 只要$d(x, y)<\delta$,就有

$$|f_k(x)-f_k(y)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(k=1,\cdots,m).$$

注意到$\bigcup_{k=1}^{m}B(f_k;\frac{\varepsilon}{3})\supset A$,则对于任一 $f\in A$,存在 $k\in\{1,\cdots,m\}$使得 $f\in B(f_k;\frac{\varepsilon}{3})$,即

$$|f(x)-f_k(x)|\leqslant\|f-f_k\|<\frac{\varepsilon}{3},\ x\in X.$$

综上所述,对于 $x,y\in X$ 只要$d(x, y)<\delta$,就有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_k(y)|$$
$$+|f_k(y)-f(y)|<\varepsilon.$$

必要性得证.

充分性.注意到$(C(X),\|\cdot\|)$为完备空间,因此只需证明 A 为完全有界集.

由条件"A 等度连续":对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对 $x, y\in X$ 只要 $d(x, y)<\delta$,则对一切 $f\in A$ 均有$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.因为 X 为紧度量空间,所以存在有限个 X 中的开球$B(y_j;\delta)(j=1,\cdots,n)$使得$\bigcup_{j=1}^{n}B(y_j;\delta)=X$.令

$$E:=\{(f(y_1),f(y_2),\cdots,f(y_n))\mid f\in A\}\subset\mathbf{C}^n.$$

由条件"A 有界"得

$$\|(f(y_1),f(y_2),\cdots,f(y_n))\|_E\leqslant\sqrt{n}\,\|f\|\leqslant\sqrt{n}M,f\in A,$$

即 E 为 $\mathbf{C}^n$ 中的有界集. 由于在 $\mathbf{C}^n$ 中有界集即为完全有界集,因此存在有限个以 E 中点为中心、$\frac{\varepsilon}{3}$ 为半径的开球之并集包含 E,记球心为

$$(f_k(y_1),\ f_k(y_2),\cdots,f_k(y_n))\quad (k=1,\ \cdots,m).$$

于是,对于任一 $f\in A$,存在 $k\in\{1,\ \cdots,m\}$ 使得

$$|f(y_j)-f_k(y_j)|\leqslant\|(f(y_1),\cdots,f(y_n))-(f_k(y_1),\cdots,f_k(y_n))\|_E$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}\quad (j=1,\ \cdots,n).$$

注意到 $\bigcup_{j=1}^{n}B(y_j;\ \delta)=X$, 即对于任一 $x\in X$,存在 $j\in\{1,\ \cdots,n\}$ 使得 $d(x,y_j)<\delta$,从而

$$|f(x)-f_k(x)|\leqslant|f(x)-f(y_j)|+|f(y_j)-f_k(y_j)|$$

$$+|f_k(y_j)-f_k(x)|<\varepsilon,$$

即 $\|f-f_k\|<\varepsilon$,亦即 $f\in B(f_k;\ \varepsilon)$. 由 $f\in A$ 的任意性,即得 $\bigcup_{k=1}^{m}B(f_k;\ \varepsilon)\supset A$,这就证明了 A 为完全有界集.

定理证毕.

§6.3　线性算子和线性泛函

定义 6.3.1　设 X,Y 为同一数域 $F(F=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C})$ 上的线性空间,若映射 $T:X\to Y$ 满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,\ x,\ y\in X,\ \alpha,\ \beta\in F,$$

则称 T 是一个线性算子.

从数域 F 上的线性空间 X 到其数域 F 中的线性算子称为 X 上的线性泛函,当 $F=\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)时,称之为实(或复)线性泛函.

定义 6.3.2　设 X,Y 为同一数域 $F(F=\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C})$ 上的赋范线性空间,$T:X\to Y$ 为线性算子. 若 T 将 X 中的任一有界集映为 Y 中的有界集,则称 T 为有界线性算子.

作为其特例,不难写出有界线性泛函的定义,不再赘述.

在本节的定理中均假定所论及的空间为同一数域上的赋范线性空间,不再一一指出.

定理 6.3.1　设 $T:X\to Y$ 为线性算子,则 T 有界的充要条件是存在 $c>$

0使得

$$\| Tx \| \leqslant c \| x \|, \ x \in X.$$

证 充分性.设E为X中的有界集,则存在$r>0$使得$E \subset B(0;r)$,即对于任一$x \in E$均有$\| x \| < r$,于是由条件得

$$\| Tx \| \leqslant c \| x \| < cr, \ x \in E,$$

即$T(E) \subset B(0; cr)$,亦即$T(E)$为Y中的有界集,此即说明线性算子T是有界的.

必要性.设$S := S(0; 1)$为X中的单位闭球,S当然是X中的有界集.由线性算子T有界的定义,存在$c>0$使得$T(S) \subset B(0; c)$,即

$$\| Tx \| < c, \ x \in S.$$

对于任一$x \in X$,若$x \neq 0$,则$\frac{x}{\| x \|} \in S$,于是由上式得

$$\| Tx \| = \left\| T\left(\| x \| \cdot \frac{x}{\| x \|} \right) \right\| = \left\| T\left(\frac{x}{\| x \|} \right) \right\| \| x \| \leqslant c \| x \|;$$

若$x=0$,则不等式$\| Tx \| \leqslant c \| x \|$显然成立,由此证得必要性.

定理 6.3.2 设$T: X \to Y$为线性算子,则下列四点等价:

(1) T在X上有界;

(2) T在X上一致连续;

(3) T在X上连续;

(4) T在某一点$x_0 \in X$处连续.

证 (1)⇒(2).由定理6.3.1,存在$c>0$使得

$$\| Tx - Ty \| = \| T(x-y) \| \leqslant c \| x - y \|, \ x, y \in X,$$

即T在X上满足Lipschitz条件,从而在X上一致连续.

(2)⇒(3)⇒(4).不需证.

(4)⇒(1).由于$Tx - Tx_0 = T(x - x_0)$,因此不妨设T在0点连续,由定义,存在$\delta>0$,对于任一$x \in X$当$\| x \| \leqslant \delta$时均有$\| Tx \| \leqslant 1$.于是对于任一$x \in X$,若$x \neq 0$,则有

$$\| Tx \| = \left\| T\left(\frac{\| x \|}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\| x \|} x \right) \right\| = \frac{\| x \|}{\delta} \left\| T\left(\frac{\delta}{\| x \|} x \right) \right\| \leqslant \frac{1}{\delta} \| x \|;$$

若$x=0$,则不等式$\| Tx \| \leqslant \frac{1}{\delta} \| x \|$显然成立,此即证得(1).

定理 6.3.3 设$T: X \to Y$为线性算子,若X是有限维的,则T有界.

证　设 $\dim X=n$，基为 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，则 $x\in X$ 可惟一表为 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$. 记 $b=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$，利用定理 6.2.3(注)，则有

$$\|Tx\|=\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k Te_k\right\|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\left\|Te_k\right\|$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=b\|\xi\|_E\leqslant bm_2\|x\|.$$

由定理 6.3.1，上式即说明 T 有界.

定理 6.3.4　设 f 是 X 上的线性泛函，则 f 为有界的充要条件是 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)(:=f^{-1}(\{0\}))$ 是 X 的闭子空间.

证　必要性. 首先，由定义 $\mathcal{N}(f)$ 显然是 X 的线性子空间. 其次，由定理 6.3.2 知，线性泛函 f 的有界性与连续性等价，因此 f 的零空间 $\mathcal{N}(f)$ 作为 $\mathbf{C}$ 中的闭集 $\{0\}$ 关于 f 的原像必为 X 中的闭集. 从而 $\mathcal{N}(f)$ 为 X 的闭子空间.

充分性. 用反证法. 若 X 上的线性泛函 f 无界，则由定理 6.3.1 知，存在 X 中的点列 (x_n) 使得

$$|f(x_n)|>n\|x_n\|\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是有

$$\left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\|=\frac{\|x_n\|}{|f(x_n)|}<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

令

$$z_n=\frac{x_n}{f(x_n)}-\frac{x_1}{f(x_1)}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $z_n\in\mathcal{N}(f)(n=1,2,\cdots)$. 但由

$$\left\|z_n-\left(-\frac{x_1}{f(x_1)}\right)\right\|=\left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\|<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

可知 $z_n\to\left(-\frac{x_1}{f(x_1)}\right)$，而 $f\left(-\frac{x_1}{f(x_1)}\right)=-1$，即 $-\frac{x_1}{f(x_1)}\notin\mathcal{N}(f)$. 这与 $\mathcal{N}(f)$ 为闭集矛盾. 由此即证明了充分性.

注　若将定理 6.3.4 中的"线性泛函"改为"线性算子"，则充分性不成立，参见习题 6.13.

定义 6.3.3 设 $T:X\to Y$ 为有界线性算子,令

$$\|T\| := \inf\{M \mid M>0 \text{ 且 } \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ x\in X\},$$

则称 $\|T\|$ 为 T 的算子范数.

定理 6.3.5 设 $T:X\to Y$ 为有界线性算子,则

(1) $\|Tx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|,\ x\in X$;

(2) $\|T\| = \sup\limits_{x\neq 0}\left\{\dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}\right\} = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\ (X\neq\{0\})$.

证 (1)由 $\|T\|$ 的定义即得.

(2) 我们将等式中的四项详细表出. 利用上、下确界的定义,通过下述一系列等式与不等式来证明,其中成立的理由是显然的,不再一一指出.

$$\begin{aligned}\|T\| &= \inf\{M \mid M>0 \text{ 且 } \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ x\in X\}\\ &= \inf\{M \mid M>0 \text{ 且 } \|Tx\| \leqslant M\|x\|,\ x\in X \text{ 且 } x\neq 0\}\\ &= \inf\left\{M \mid M>0 \text{ 且 } \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant M,\ x\in X \text{ 且 } x\neq 0\right\}\\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x\in X \text{ 且 } x\neq 0\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \,\middle|\, x\in X \text{ 且 } x\neq 0\right\}\\ &= \sup\{\|Tx\| \mid x\in X \text{ 且 } \|x\|=1\}\\ &\leqslant \sup\{\|Tx\| \mid x\in X \text{ 且 } \|x\|\leqslant 1\};\end{aligned}$$

此外,由(1)可知,对于任一 $x\in X$ 且 $\|x\|\leqslant 1$ 均有 $\|Tx\|\leqslant\|T\|$,于是

$$\|T\| \geqslant \sup\{\|Tx\| \mid x\in X \text{ 且 } \|x\|\leqslant 1\},$$

由此即得所证.

例 1 设 $T:L[a,b]\to C[a,b]$, $\forall f\in L[a,b]$定义

$$(Tf)(x) = \int_{[a,x]} f\mathrm{d}m,\ x\in[a,b],$$

则显然 T 为一线性算子.

(1) 若将 $C[a,b]$视为 $L[a,b]$的子空间,则 $\|T\| = b-a$;

(2) 若 $C[a,b]$取通常的"上确界"范数,则 $\|T\|=1$.

证 为了明确起见,我们将空间 $L[a,b]$的范数 $\|\cdot\|_1$ 记为 $\|\cdot\|_L$,将空间 $C[a,b]$的"上确界"范数记为 $\|\cdot\|_c$.

(1) 对于任一 $f\in L[a,b]$,有

$$\|Tf\|_L=\int_a^b|(Tf)(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b\left|\int_{[a,x]}f\mathrm{d}m\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b\left(\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}x=(b-a)\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m$$

$$=(b-a)\|f\|_L,$$

即得 T 有界,且 $\|T\|\leqslant b-a$.

另一方面,不妨设 $a+1\leqslant b$,令 $f_n=n\chi_{[a,a+\frac{1}{n}]}(n=1,2,\cdots)$,则易知 $\|f_n\|_L=1$,且

$$\|T\|\geqslant\|Tf_n\|_L=\int_a^b|(Tf_n)(x)|\mathrm{d}x\geqslant\int_{a+\frac{1}{n}}^b|(Tf_n)(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{a+\frac{1}{n}}^b\left(\int_{[a,x]}f_n\mathrm{d}m\right)\mathrm{d}x=\int_{a+\frac{1}{n}}^b\mathrm{d}x=b-a-\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

即得 $\|T\|\geqslant b-a$.

由此证得 $\|T\|=b-a$.

(2) 对于任一 $f\in L[a,b]$,有

$$\|Tf\|_C=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|(Tf)(x)|\}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\left|\int_{[a,x]}f\mathrm{d}m\right|\right\}$$

$$\leqslant\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m=\|f\|_L,$$

即得 T 有界,且 $\|T\|\leqslant 1$.

另一方面,取 $f_0(t)=\dfrac{1}{b-a}(t\in[a,b])$,则显然 $\|f_0\|_L=1$,且

$$\|T\|\geqslant\|Tf_0\|_C=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left\{\left|\int_{[a,x]}f_0\mathrm{d}m\right|\right\}=1,$$

即得 $\|T\|\geqslant 1$.

由此证得 $\|T\|=1$.

例 2 设 $K\in C([a,b]\times[a,b])$,令

$$(Tx)(s)=\int_a^bK(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ x\in C[a,b],$$

则 $T:C[a,b]\to C[a,b]$为有界线性算子,且

$$\| T \| = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\}.$$

证 显然,$T: C[a, b] \to C[a, b]$且为线性算子.又对于任一 $x \in C[a, b]$,有

$$\begin{aligned} \| Tx \|_c &= \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \left| \int_a^b K(s, t) x(t) \mathrm{d}t \right| \right\} \\ &\leqslant \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\} \max_{a \leqslant t \leqslant b} \{ | x(t) | \} \\ &= \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\} \| x \|_c, \end{aligned}$$

即得 T 有界,且 $\| T \| \leqslant \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\}$.

另一方面,由于$\int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t$ 是s 的连续函数,因此存在 $s_0 \in [a, b]$使得

$$\int_a^b | K(s_0, t) | \mathrm{d}t = \max_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\}.$$

令

$$x_0(t) = \mathrm{sgn}(K(s_0, t)),\ t \in [a, b],$$

则 x_0 为$[a, b]$上的 $\mathscr{L}$ 可测函数,且$|x_0(t)| \leqslant 1 (t \in [a, b])$.由 L 可积函数与连续函数的关系可知,存在 $x_n \in C[a, b]$使得 $\| x_n \|_c \leqslant 1 (n = 1, 2, \cdots)$,且

$$\int_{[a, b]} | x_n - x_0 | \mathrm{d}m \to 0.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b | K(s_0, t) | \mathrm{d}t &= \int_a^b K(s_0, t) x_0(t) \mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty} \int_a^b K(s_0, t) x_n(t) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{n \to \infty} (Tx_n)(s_0) \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \| Tx_n \| \leqslant \| T \|. \end{aligned}$$

综上所述,便有 $\| T \| = \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} \left\{ \int_a^b | K(s, t) | \mathrm{d}t \right\}$.

注 关于函数 $\mathrm{sgn}(u)$的一点说明:若 $u \in \mathbf{R}$,则 $\mathrm{sgn}(u)$即为"符号函数",且恒有 $u \cdot \mathrm{sgn}(u) = |u|$,我们据此性质将函数的定义域拓广到 $\mathbf{C}$ 上,则显然

应定义

$$\operatorname{sgn}(u)=\begin{cases}0, & u=0,\\ \dfrac{\bar{u}}{|u|}, & u\neq 0,\end{cases}\quad u\in\mathbf{C}.$$

以后将不再一一指出.

例 3 设 $D:C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, $\forall x\in C^{(1)}[0,1]$,定义

$$(Dx)(t)=x'(t),\ t\in[0,1],$$

将 $C^{(1)}[0,1]$视作 $C[0,1]$的子空间,则 D 为无界线性算子.

证 导算子 D 显然是线性算子.取

$$x_n(t)=t^n,\ t\in[0,1]\quad(n=1,2,\cdots),$$

则 $x_n\in C^{(1)}[0,1]$,且 $\|x_n\|_c=1(n=1,2,\cdots)$,而

$$\|Dx_n\|_c=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|nt^{n-1}|\}=n=n\|x_n\|_c\quad(n=1,2,\cdots),$$

则由定理 6.3.1 知 D 无界.

§6.4 线性算子空间和共轭空间

定理 6.4.1 设 X,Y 为同一数域 F 上的赋范线性空间,记 $\mathscr{B}(X,Y)$为由 X 到 Y 中的有界线性算子全体所成之集,在 $\mathscr{B}(X,Y)$中引进通常的函数(算子)的线性运算,且以算子范数作为空间的范数,则 $\mathscr{B}(X,Y)$为一赋范线性空间.又若 Y 为 Banach 空间,则 $\mathscr{B}(X,Y)$也为 Banach 空间.

证 (1) 首先说明 $\mathscr{B}(X,Y)$为线性空间.

设 $S,T\in\mathscr{B}(X,Y)$, $\alpha\in F$,则 $S+T$ 与αT 显然是X 到 Y 的线性算子,且由

$$\begin{aligned}\|(S+T)x\|&=\|Sx+Tx\|\leqslant\|Sx\|+\|Tx\|\\&\leqslant(\|S\|+\|T\|)\|x\|,\ x\in X,\end{aligned}$$

$$\|(\alpha T)x\|=\|\alpha(Tx)\|=|\alpha|\ \|Tx\|\leqslant(|\alpha|\ \|T\|)\|x\|,\ x\in X,$$

即知 $S+T,\alpha T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

(2) 其次说明算子范数确是空间 $\mathscr{B}(X,Y)$的范数.

设 $S,T\in\mathscr{B}(X,Y),\alpha\in F$,则由算子范数的定义与定理 6.3.5(2),显然有$\|T\|\geqslant 0$, $\|\alpha T\|=|\alpha|\ \|T\|$,又由上述(1)的证明可知,$\|S+T\|\leqslant\|S\|+\|T\|$.

现说明 $\|T\|=0 \Leftrightarrow T=0$. 事实上,若 $T=0$,即 $Tx=0(x\in X)$,则由算子范数的定义即知 $\|T\|=0$;反之,若 $\|T\|=0$,则由 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$ 可知 $\|Tx\|=0(x\in X)$,从而 $Tx=0(x\in X)$,即 $T=0$.

(3) 最后说明:若 Y 完备,则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 完备.

设 (T_n) 为赋范线性空间 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的 Cauchy 点列,则对于任一 $\varepsilon\in(0,1)$,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n, m\geqslant N$ 时,恒有 $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$. 由于

$$\|T_nx-T_mx\| = \|(T_n-T_m)x\| \leqslant \|T_n-T_m\|\|x\|,\ x\in X,$$

因此对于任一 $x\in X$, (T_nx) 均为 Banach 空间 Y 中的 Cauchy 点列,从而为 Y 中的收敛点列. 定义算子 $T:X\to Y$,

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_nx,\ x\in X.$$

注意到,对于任意的 $x, y\in X$, $\alpha, \beta\in F$,有

$$\begin{aligned}
&\|T(\alpha x+\beta y)-(\alpha Tx+\beta Ty)\|\\
\leqslant&\|T(\alpha x+\beta y)-T_n(\alpha x+\beta y)\|+\|T_n(\alpha x+\beta y)-(\alpha Tx+\beta Ty)\|\\
\leqslant&\|T(\alpha x+\beta y)-T_n(\alpha x+\beta y)\|+|\alpha|\|T_nx-Tx\|+|\beta|\|T_ny-Ty\|\to 0.
\end{aligned}$$

由此可知: $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$, 即 T 为线性算子.

又因为,当 $n, m\geqslant N$ 时,恒有

$$\|T_nx-T_mx\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|\leqslant\varepsilon\|x\|,\ x\in X.$$

令 $m\to\infty$,由范数的连续性得

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|\leqslant\|x\|,\ x\in X,\ n\geqslant N.$$

于是,一方面,由 $T_N\in\mathscr{B}(X,Y)$ 与 T 为线性算子可知 $T-T_N$ 也为线性算子,且由

$$\|(T-T_N)x\| = \|Tx-T_Nx\|\leqslant\|x\|,\ x\in X,$$

可知 $T-T_N\in\mathscr{B}(X,Y)$,于是 $T=(T-T_N)+T_N\in\mathscr{B}(X,Y)$;另一方面,由

$$\|(T-T_n)x\| = \|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|,\ x\in X,\ n\geqslant N,$$

可知

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon,\ n\geqslant N.$$

此即说明 (T_n) 在 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中(依范数)收敛(于 T). 从而证明了 $\mathscr{B}(X,Y)$ 的

完备性.

至此定理证毕.

定义 6.4.1　设 X 为赋范线性空间，记 X' 为 X 上有界线性泛函全体所成之空间(即 $X'=\mathscr{B}(X,\mathbf{C})$ 或 $\mathscr{B}(X,\mathbf{R})$)，则称 X' 为 X 的共轭空间(或称为对偶空间、伴随空间). 若 X 与 X' 保范线性同构，则称 X 为自共轭(或自伴)空间，此时认为 $X=X'$.

显然，任一赋范线性空间的共轭空间必为 Banach 空间.

定理 6.4.2　设 $1\leqslant p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, μ 为可测空间 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限测度，则

$$(L^p,\ \|\cdot\|_p)'=(L^q,\ \|\cdot\|_q),$$

且有表达式

$$\Phi(f)=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu,\ f\in L^p,$$

其中 $\Phi\in(L^p)'$ 与 $g\in L^q$ 相对应.

证　在以下证明中，记 $L^p:=(L^p,\|\cdot\|_p)$, $L^q:=(L^q,\|\cdot\|_q)$.

(1) 对于任一 $g\in L^q(1<q\leqslant+\infty)$，定义 $\Phi:L^p\to\mathbf{C}$,

$$\Phi(f)=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu,\ f\in L^p\quad\left(1\leqslant p<+\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

则由 Hölder 不等式(参见定理 6.2.2 证明后注)可知 $f\cdot g\in L^1$. 由积分的线性性可知 Φ 为 L^p 上的线性泛函；又由

$$|\Phi(f)|\leqslant\|f\cdot g\|_1\leqslant\|g\|_q\|f\|_p,\ f\in L^p\quad(1\leqslant p<+\infty),$$

可知 Φ 有界，且 $\|\Phi\|\leqslant\|g\|_q$.

此外，注意到在 L^q 中是将 $L^q(X,\mu)$ 中 μ-a.e. 相等的函数视作同一元，因此，若 $g_1,g_2\in L^q$ 且 $g_1\neq g_2$，记 g_k 对应于 $\Phi_k(k=1,2)$，则易知必有 $\Phi_1\neq\Phi_2$(详细论证留给读者). 由此可知，在此基础上，若令 $T:L^q\to(L^p)'$, $T(g)=\Phi$，则 T 为单射，且 T 显然为线性映射.

(2) 由于(2)的证明比较冗长，因此先将证明的思路做一交待.

我们往证：对于任一 $\Phi\in(L^p)'$，存在 $g\in L^q$，使得

$$\Phi(f)=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu,\ f\in L^p\quad\left(1\leqslant p<+\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right),$$

且 $\|g\|_q\leqslant\|\Phi\|$.

由此可知，上述(1)中定义的线性映射 $T: L^q \to (L^p)'$ 为满射，于是 T 为线性同构映射；又结合(1)中的不等式 $\|\Phi\| \leqslant \|g\|_q$，即知 $\|Tg\| = \|\Phi\| = \|g\|_q$. 从而 T 为 L^q 到 $(L^p)'$ 上的保范线性同构映射，亦即证明了定理.

(2.1)由于 μ 为 $(X, \mathscr{A})$ 上的 σ 有限测度，因此按例首先设 $\mu(X) < +\infty$.

对于任一 $\Phi \in (L^p)'$，因为 μ 为有限测度，所以恒有 $\chi_E \in L^p (E \in \mathscr{A})$，于是可定义集函数 $\nu: \mathscr{A} \to \mathbf{C}$(或 $\mathbf{R}$)，

$$\nu(E) := \Phi(\chi_E),\ E \in \mathscr{A}.$$

设(E_n)为 X 中两两不交的 $\mathscr{A}$ 可测集列，记 $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k (n = 1, 2, \cdots)$，$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则有

$$\chi_{A_n} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} (n = 1, 2, \cdots), \chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n},\ \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty,$$

$$\|\chi_{A_n} - \chi_A\|_p = \left(\int_X |\chi_{A_n} - \chi_A|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \chi_{E_k}\Big)^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_X \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \chi_{E_k}\Big) \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_k)\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 (n \to \infty),$$

即(χ_{A_n})在 L^p 中(依范数)收敛于 χ_A，于是由 Φ 的连续性得 $\Phi(\chi_{A_n}) \to \Phi(\chi_A)$，即

$$\nu(A_n) \to \nu(A) (n \to \infty).$$

又由 Φ 的线性性知，

$$\nu(A_n) = \Phi(\chi_{A_n}) = \Phi\Big(\sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Phi(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{n} \nu(E_k) \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

令 $n \to \infty$ 即有 $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$，此即说明 ν 为$(X, \mathscr{A})$上的复测度(或有限广义测度).

设 $E \in \mathscr{A}$ 且 $\mu(E) = 0$，则显然有 $\|\chi_E\|_p = 0$，由于在 L^p 中将μ-a.e. 相等的函数视作同一元，因此在 L^p 中 $\chi_E = 0$，于是 $\nu(E) = \Phi(\chi_E) = \Phi(0) = 0$，此即说明 $\nu \ll \mu$.

由此引用 Radon-Nikodym 定理，则存在惟一的 $g \in L^1$，使得

$$\Phi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E g \mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E \cdot g \mathrm{d}\mu,\ E \in \mathscr{A}.$$

由 Φ 与积分的线性性,若将上式两端中的 χ_E 替换为简单函数,则显然等式仍成立.

对于任一 $f\in L^p$,则存在简单函数列 (f_n) 使得 $|f_n(x)|\leqslant|f(x)|(x\in X, n=1, 2, \cdots)$,且 $f_n(x)\to f(x)(x\in X)$,于是 $|f_n(x)-f(x)|^p\leqslant 2^p|f(x)|^p(x\in X, n=1, 2, \cdots)$.应用控制收敛定理,即得 $\|f_n-f\|_p\to 0$,亦即 (f_n) 在 L^p 中(依范数)收敛于 f.再由 Φ 的连续性即得

$$\Phi(f)=\lim_{n\to\infty}\Phi(f_n)=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\cdot g\mathrm{d}\mu.$$

需要指出的是,上述论证中所得的 $g\in L^1$,若能证明 $g\in L^q$,由于简单函数 $f_n\in L^p$,则对于任一 $f\in L^p$ 可知 $f\cdot g$, $(f_n-f)g\in L^1$,且由

$$\left|\int_X f_n\cdot g\mathrm{d}\mu-\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\int_X|(f_n-f)g|\mathrm{d}\mu$$

$$=\|(f_n-f)g\|_1\leqslant\|f_n-f\|_p\|g\|_q\to 0\quad(n\to\infty),$$

即得

$$\Phi(f)=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu,\ f\in L^p.$$

证明 $g\in L^q$,且同时可证得 $\|g\|_q\leqslant\|\Phi\|$.

注意到,当 $\mu(X)<+\infty$ 时显然有 $L^\infty\subset L^p$,由于简单函数 $f_n\in L^\infty$ 且 $g\in L^1$,则对于任一 $f\in L^\infty$,有 $f\cdot g$, $(f_n-f)g\in L^1$,且 $\|(f_n-f)g\|\leqslant\|f_n-f\|_\infty\|g\|_1$,与上段同理可得

$$\Phi(f)=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu,\ f\in L^\infty.$$

现考虑 $p\in(1, +\infty)$ 的情形.基于上述结论,我们记 $B_n:=X(|g|\leqslant n)$ $(n=1, 2, \cdots)$,取 $f=|g|^{q-1}\operatorname{sgn}(g)\chi_{B_n}$,则显然 $f\in L^\infty$,且 $f\cdot g=|f|^p=|g|^q\chi_{B_n}$,于是有

$$\int_X|g|^q\chi_{B_n}\mathrm{d}\mu=\left|\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu\right|=|\Phi(f)|\leqslant\|\Phi\|\ \|f\|_p$$

$$=\|\Phi\|\left(\int_X|g|^q\chi_{B_n}\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

即得

$$\int_X |g|^q \chi_{B_n} d\mu \leqslant \|\Phi\|^q \quad (n=1,2,\cdots).$$

注意到 $g\in L^1$，则可认为 $X=X(|g|<+\infty)$，于是 $B_n \uparrow X$. 对上式应用 Levi 定理，得到 $\int_X |g|^q d\mu \leqslant \|\Phi\|^q$，此即说明 $g\in L^q$，且 $\|g\|_q \leqslant \|\Phi\|$.

其次，当 $p=1$ 时，基于同样的考虑，对于任一 $E\in\mathscr{A}$，取 $f=\mathrm{sgn}(g)\chi_E$，则 $f\in L^\infty$，于是

$$\int_E |g| d\mu = \left|\int_X f\cdot g d\mu\right| = |\Phi(f)|$$

$$\leqslant \|\Phi\| \|f\|_1 \leqslant \|\Phi\| \mu(E),\ E\in\mathscr{A}.$$

由此，利用反证法易知 $|g(x)|\leqslant\|\Phi\|$ a.e. 于 X，即得 $g\in L^\infty$，且 $\|g\|_\infty \leqslant \|\Phi\|$.

至此，我们完成了在 μ 为有限测度的假定下的定理的证明。

(2.2) 现设 μ 为 $(X,\mathscr{A})$ 上的 σ 有限测度(且 $\mu(X)=+\infty$)，则存在两两不交的 $\mathscr{A}$ 可测集列 (E_n) 满足：$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 且 $0<\mu(E_n)<+\infty (n=1,2,\cdots)$.

令

$$h=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\mu(E_n)}\chi_{E_n},$$

则 h 在 X 上非负可测，且由 $\int_X |h| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 可知 $h\in L^1$，于是由下式

$$\tilde{\mu}(E):=\int_E h d\mu,\ E\in\mathscr{A},$$

便定义了 $(X,\mathscr{A})$ 上的一个有限测度 $\tilde{\mu}$. 于是(参见习题 5.5)，对于任一 $F\in L^p(\tilde{\mu})$，有

$$\int_X |Fh^{\frac{1}{p}}|^p d\mu = \int_X |F|^p h d\mu = \int_X |F|^p d\tilde{\mu}.$$

由此可知，若视 F 为 X 上的 $\mathscr{A}$ 可测函数，则 $F\in L^p(\tilde{\mu}) \Leftrightarrow Fh^{\frac{1}{p}}\in L^p(\mu)$，且由 $F \mapsto Fh^{\frac{1}{p}}$ 确定了一个从 $L^p(\tilde{\mu})$ 到 $L^p(\mu)$ 上的保范线性同构映射. 由此，对于任一 $\Phi\in(L^p(\mu))'$，我们定义

$$\Psi(F):=\Phi(Fh^{\frac{1}{p}}),\ F\in L^p(\tilde{\mu}),$$

则易知 $\Psi\in(L^p(\tilde{\mu}))'$，且 $\|\Psi\|=\|\Phi\|$. 利用(2.1)已证之结论，则存在

$G\in L^q(\tilde{\mu})$使得

$$\Psi(F)=\int_X F\cdot G\mathrm{d}\tilde{\mu},\ F\in L^p(\tilde{\mu}).$$

当 $p\in(1,+\infty)$时,令 $g=Gh^{\frac{1}{q}}$,则 $g\in L^q(\mu)$,且有

$$\|g\|_q=\left(\int_X|g|^q\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_X|G|^q h\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_X|G|^q\mathrm{d}\tilde{\mu}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\|G\|_q=\|\Psi\|=\|\Phi\|;$$

当 $p=1$ 时,令 $g=G\in L^\infty$,则

$$\|g\|_\infty=\|G\|_\infty=\|\Psi\|=\|\Phi\|.$$

此外,对于任一 $f\in L^p(\mu)$,注意到 $f\cdot h^{-\frac{1}{p}}\in L^p(\tilde{\mu})$,于是

$$\Phi(f)=\Psi(f\cdot h^{\frac{1}{p}})=\int_X f\cdot h^{-\frac{1}{p}}\cdot G\mathrm{d}\tilde{\mu}=\int_X f\cdot g\mathrm{d}\mu.$$

至此定理证毕.

推论 1 设 $1\leqslant p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则$(l^p)'=l^q$.

推论 2 $(\mathbf{C}^n,\ \|\cdot\|_E)'=(\mathbf{C}^n,\ \|\cdot\|_E)$;$(\mathbf{R}^n,\ \|\cdot\|_E)'=(\mathbf{R}^n,\ \|\cdot\|_E)$.

习 题

1. 设(x_n)为赋范线性空间 X 中的点列,证明:若 $x_n\to x$,则 $\|x_n\|\to\|x\|$.

2. 设 M 为线性空间 X 的非空子集,证明:span$M$ 是 X 中包含 M 的最小线性子空间.

3. 证明:若无限维赋范线性空间 X 具有 Schauder 基,则 X 可分.

4. 设 $e_n=(\delta_{n,k})_{k\geqslant1}$,验证:$\{e_n\}$为 $l^p(p\in[1,+\infty))$以及 c_0 的 Schauder 基.又问 l^∞ 是否具有 Schauder 基? 为什么?

5. 证明:对于任一 $f\in L^\infty(X,\mu)$,均存在相应的 μ-零测集 E_0 使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E_0^c}\{|f(x)|\}.$$

6. 设 $1\leqslant p_1<p_2$,证明:

(1) $l^{p_1}\subset l^{p_2}$;

(2) 当 $\mu(X)<+\infty$时,$L^{p_2}(X,\mu)\subset L^{p_1}(X,\mu)$.

7. 证明:(1)若 $x\in l^p(p\geqslant1)$,则 $x\in l^\infty$, 且

$$\lim_{p\to+\infty}\|x\|_p=\|x\|_\infty;$$

(2) 若 $f\in L^\infty(X,\mu)$,且 $\mu(X)<+\infty$,则 $f\in L^p(X,\mu)(p\geqslant1)$,且

$$\lim_{p\to+\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

8. 设 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$，其中 X_n 为 Banach 空间($n=1,2,\cdots$)，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<+\infty,\ x=(x_n)\in X\quad(p\in[1,+\infty)),$$

在 X 中引进通常的序列加法和数乘运算.令

$$\|x\|:=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ x=(x_n)\in X\quad(p\in[1,+\infty)).$$

证明:$(X,\|\cdot\|)$为 Banach 空间.

9. 设 c 为全体收敛数列所成之集,在 c 中引进通常的序列加法与数乘运算,令

$$\|x\|:=\sup_{n\in\mathbf{N}}|\xi_n|,\ x=(\xi_n)\in c,$$

证明:c 为 Banach 空间.

10. 证明:有限维赋范线性空间必为 Banach 空间.

11. 证明:有限维线性空间上的任何两个范数都是等价的.

12. 设

$$Tx=\left(\frac{\xi_n}{n}\right),\ x=(\xi_n)\in l^\infty,$$

验证:$T\in\mathscr{B}(l^\infty,l^\infty)$,但 $T(l^\infty)$不是 l^∞ 的闭子空间.

13. 举例说明,存在由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的无界线性算子 T,使得零空间 $\mathscr{N}(T)$为 X 的闭子空间.

14. 设 X 为赋范线性空间,在 $X\times X$ 上引进通常的向量加法与数乘运算,令

$$\|(x,y)\|:=\sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2},\ (x,y)\in X\times X,$$

定义映射 $T:X\times X\to X$,

$$T(x,y)=x+y,\ (x,y)\in X\times X.$$

证明:(1)$X\times X$ 为赋范线性空间;

(2) $T\in\mathscr{B}(X\times X,X)$.

15. 设$(X,\|\cdot\|_X)$与$(Y,\|\cdot\|_Y)$为两个 Banach 空间,在 $X\times Y$ 上引进通常的向量加法与数乘运算,且定义

$$\|(x,y)\|:=\|x\|_X+\|y\|_Y,$$

证明:(1)$(X\times Y,\|\cdot\|)$为 Banach 空间.

(2) 又若 Y 是紧的,且映射 $f:X\to Y$ 的图像

$$\mathscr{G}=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in X\}$$

是 $X\times Y$ 中的闭集,则 f 为连续映射.

16. 设 $\alpha\in\mathbf{R}$ 为常数,定义 $T:B(\mathbf{R})\to B(\mathbf{R})$

$$(Tf)(t)=f(t-\alpha)\ (t\in\mathbf{R}),\quad f\in B(\mathbf{R}),$$

证明:T 为有界线性算子.

17. 设 T 是由赋范线性空间 X 到 Y 上的线性算子,且存在常数 $b>0$,使得

$$\|Tx\|\geqslant b\|x\|,x\in X,$$

证明:$T^{-1}:Y\to X$ 存在,且为有界线性算子.

18. 设 X 为赋范线性空间,Y 为 Banach 空间,D 为 X 的子空间,$T\in\mathscr{B}(D,\ Y)$. 证明:存在惟一的 $\tilde{T}\in\mathscr{B}(\overline{D},Y)$,使得 $\tilde{T}x=Tx(x\in D)$且 $\|\tilde{T}\|=\|T\|$.

19. 设 f 与 g 为线性空间 X 上的线性泛函,且 $\mathscr{N}(f)=\mathscr{N}(g)$,证明:存在常数 c,使得 $g=cf$.

20. 设 f 为赋范线性空间 X 上的无界线性泛函,证明:$\overline{\mathscr{N}(f)}=X$.

21. 设 f 为赋范线性空间 X 上的非零线性泛函,证明:f 是开映射,即 f 将开集映为开集.

22. 求由下式

$$f(x):=\int_{-1}^{0}x(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}x(t)\mathrm{d}t,\ x\in C[-1,\ 1]$$

定义的 $C[-1,1]$上线性泛函 f 的范数.

23. 求由下式

$$f(x):=\int_{a}^{b}x(t)K(t)\mathrm{d}t,\ x\in C[a,\ b]$$

定义的 $C[a,\ b]$上线性泛函 f 的范数,其中 $K\in C[a,\ b]$.

24. 求由下式

$$f(x):=\sum_{k=0}^{m}c_kx(t_k),\ x\in C[a,\ b]$$

(其中 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$, $c_k\in\mathbf{R}(k=1,\ 2,\ \cdots,m)$)定义的 $C[a,\ b]$上的线性泛函 f 的范数.

25. 取定 $a=(\alpha_n)\in l^\infty$,定义映射 $T:l^p\to l^p(p\in[1,\ +\infty))$,

$$T(\xi_n)=(\alpha_n\xi_n),\ (\xi_n)\in l^p,$$

证明 $T\in\mathscr{B}(l^p,\ l^p)$,且试求 $\|T\|$.

26. 设(T_n)为 $\mathscr{B}(X,Y)$中的收敛点列,证明:(T_n)在 X 的任一有界集上一致收敛.

27. 设 X 为 n 维赋范线性空间,$\{e_1,\cdots,e_n\}$为 X 的基,令

$$\|x\|:=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{|\xi_k|\},\ x=\sum_{k=1}^{n}\xi_ke_k\in X,\ \xi_k\in\mathbf{C}\quad(k=1,\cdots,n),$$

试求:$(X,\|\cdot\|)$的共轭空间.

28. 证明:$(c_0)'=l^1$.

第七章　内积空间

§7.1　内积空间的概念

定义 7.1.1　设 H 为复(或实)线性空间,若由 $H\times H$ 到 $\mathbf{C}$(相应地 $\mathbf{R}$)中的泛函$(\cdot,\cdot)$满足:

(1) $(x,x)\geqslant 0$, $x\in H$;且$(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$;

(2) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$, $x,y,z\in H$, $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$;

(3) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, $x,y\in H$,

则$(\cdot,\cdot)$称为 H 上的内积.具有内积的线性空间称作内积空间.

定理 7.1.1　设 H 为内积空间,定义

$$\|x\|:=\sqrt{(x,x)},\ x\in H,$$

则 $\|\cdot\|$ 是空间 H 的范数(称之为由内积导出的范数).

证　由 $\|\cdot\|$ 的定义,显然有 $\|x\|\geqslant 0(x\in H)$,且由内积定义中(1)可知,$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$.由内积定义的(2)、(3)可知,$(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)(\alpha\in\mathbf{C})$,由此即可推得 $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|(\alpha\in\mathbf{C})$.最后只需验证"三角不等式"成立,为此,我们首先证明 Schwarz 不等式:

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|,\ x,\ y\in H.$$

若 $y=0$,则上式两端均为 0.下设 $y\neq 0$,则对于任一 $\alpha\in\mathbf{C}$,有

$$\begin{aligned}0\leqslant\|x-\alpha y\|^2&=(x-\alpha y,x-\alpha y)\\&=\|x\|^2-2\mathrm{Re}(\alpha(y,x))+|\alpha|^2\|y\|^2,\end{aligned}$$

特别取 $\alpha=\dfrac{(x,y)}{\|y\|^2}$,则有

$$0\leqslant\|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2},$$

经整理后即得 Schwarz 不等式.由此,对于任意的 $x,\ y\in H$,有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\|x\|^2+2\mathrm{Re}((y,x))+\|y\|^2\\&\leqslant\|x\|^2+2|(y,x)|+\|y\|^2\end{aligned}$$

$$\leqslant \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

即证得三角不等式.

定理证毕.

注　1° 易知,内积是二元连续函数,即当 $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ 时,有 $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

2° 易证,由内积导出的范数满足:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

——平行四边形公式;

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2)$$

——复内积空间的极化恒等式;

$$(x, y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

——实内积空间的极化恒等式.

3° 可以证明:赋范线性空间 X 的范数 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式的充要条件是在 X 中可定义内积使得 X 成为内积空间(此时,原来空间的范数即成为由此内积导出的范数).

定义 7.1.2　完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

例 1　在 $\mathbf{C}^n$ 中定义

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta_k},\ x=(\xi_1, \cdots, \xi_n),\ y=(\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{C}^n,$$

则 $(\cdot,\cdot)$ 为内积,且

$$\|x\|=\sqrt{(x, x)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2}=\|x\|_E.$$

例 2　在 $L^2(X, \mu)$ 中定义

$$(f, g)=\int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu,\ f, g \in L^2,$$

且将 a.e. 相等的函数视作同一元,则 $(\cdot,\cdot)$ 为内积,且

$$\|f\|=\sqrt{(f, f)}=\sqrt{\int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu}=\|f\|_2.$$

§7.2 Fourier 展开

定义 7.2.1 设 H 为内积空间.

(1) 设 $x,y\in H$,若$(x,y)=0$,则称 x 与 y 正交,记为 $x\perp y$.

显然,若 $x\perp y$,则成立“勾股公式”:

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

(2) 设 $x\in H,E\subset H$,若对于任一 $y\in E$,均有 $x\perp y$,则称 x 与 E 正交,记为 $x\perp E$.

(3) 设 $E,F\subset H$,若对于任一 $x\in E$ 以及任一$y\in F$,均有 $x\perp y$, 则称 E 与 F 正交,记为 $E\perp F$.

(4) 设 $E\subset H$ 且 $0\notin E$,若对于任意的 $x,y\in E$,当 $x\neq y$ 时必有$x\perp y$,则称 E 为H 的一个直交系;若又有 $\|x\|=1(x\in E)$,则称 E 为H 的一个就范直交系.

定理 7.2.1(Bessel 不等式) 设 E 为内积空间H 中的就范直交系,则对于任一 $x\in H$,

$$E(x):=\{e\mid (x,e)\neq 0,\ e\in E\}$$

为至多可数集,且成立 Bessel 不等式

$$\sum_{e\in E}|(x,e)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

注 约定,$\sum\limits_{e\in E}|(x,e)|^2:=\sum\limits_{e\in E(x)}|(x,e)|^2$.以后遇到类似的记号也可作出相应的约定,不再一一指出.

证 任意取定 $x\in H$,令

$$E_n:=\{e\mid |(x,e)|\geqslant\frac{1}{n},\ e\in E\},$$

则任一 E_n 均为有限集,事实上,若存在 E_N 为无限集,则 E_N 必存在可数子集,记为$\{e_k\}$.注意到,一方面由 E_N 的定义,有

$$\sum_{k=1}^{m}|(x,e_k)|^2\geqslant\frac{m}{N^2}\to+\infty\quad(m\to\infty);$$

但另一方面,由于 E(从而$\{e_k\}$)为就范直交系,经运算可得

$$0\leqslant\|x-\sum_{k=1}^{m}(x,e_k)e_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(x,e_k)|^2\quad(m=1,2,\cdots),$$

即

$$\sum_{k=1}^{m} |(x,e_k)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (m=1,2,\cdots),$$

由此得到矛盾. 于是 $E(x)=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ 为至多可数集. 注意到上述后一个不等式的论证中只用到了 $\{e_k\}$ 为规范直交系的条件,由此不妨将 $E(x)$ 仍然记作 $\{e_k\}$,若其为有限集,则由上述不等式即得 Bessel 不等式;若其为可数集,则只需令 $m\to\infty$ 即得所证之 Bessel 不等式.

引理　设 H 为 Hilbert 空间,(x_k) 为 H 中正交序列,则 $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛的充要条件为 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2$ 收敛,且当收敛时成立

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2.$$

证　由于 (x_k) 中的元素两两正交,则由勾股公式结合归纳法易知,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2 \quad (n=1,2,\cdots);$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|^2 \quad (n,p=1,2,\cdots),$$

因此,$\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)$ 为 H 中 Cauchy 点列的充要条件是 $\left(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 数列,再由 H 与 $\mathbf{R}$ 的完备性即知:$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛的充要条件为 $\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2$ 收敛,且由范数的连续性推得

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}x_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2.$$

注　由引理的结论易知,$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ 的收敛性与 $\{x_k\}$ 的排列次序无关,且当其收敛时必收敛于同一元素. 因此,我们可将引理表述为如下形式:

设 H 为 Hilbert 空间,Λ_0 为至多可数集,$x_\lambda\in H(\lambda\in\Lambda_0)$,且当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时 $x_{\lambda_1}\perp x_{\lambda_2}$,则 $\sum_{\lambda\in\Lambda_0}x_\lambda\in H$ 的充要条件为 $\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\|x_\lambda\|^2<+\infty$,且成立

$$\left\|\sum_{\lambda\in\Lambda_0}x_\lambda\right\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\|x_\lambda\|^2.$$

(事实上,当 Λ_0 为有限集时,恒有 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0} x_\lambda\in H$,上述等式乃勾股公式的直接推广).

定义 7.2.2 设 E 为内积空间 H 中的就范直交系,若 $x\perp E\Rightarrow x=0$, 则称 E 为 H 的一个完全直交系.

定理 7.2.2(Fourier 展开定理) 设 E 为 Hilbert 空间 H 中的完全直交系,则成立

$$x - \sum_{e\in E}(x,e)e,\ x\in H,$$

其中 (x,e) 称作 x 的 Fourier 系数.

证 对于任一 $x\in H$,由定理 7.2.1 可知,$E(x):=\{e\mid (x,\ e)\neq 0,\ e\in E\}$ 为至多可数集,且成立

$$\sum_{e\in E(x)}\|(x,\ e)e\|^2=\sum_{e\in E(x)}|(x,\ e)|^2=\sum_{e\in E}|(x,\ e)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

由于 H 为 Hilbert 空间,则由引理可知 $\sum\limits_{e\in E(x)}(x,\ e)e\in H$,记

$$y=\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)e.$$

由内积的连续性与内积关于第一变元的线性性知,对于任一 $\tilde{e}\in E$,若 $\tilde{e}\in E(x)$,则有

$$(y,\ \tilde{e})=\Big(\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)e,\ \tilde{e}\Big)=\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)(e,\ \tilde{e})=(x,\ \tilde{e});$$

若 $\tilde{e}\in E\setminus E(x)$,则有

$$(y,\ \tilde{e})=\Big(\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)e,\ \tilde{e}\Big)=\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)(e,\ \tilde{e})=0=(x,\ \tilde{e}).$$

由此即得

$$(y-x,\ \tilde{e})=0,\ \tilde{e}\in E,$$

亦即 $(y-x)\perp E$. 由 E 为完全直交系的定义即得 $x-y$, 从而

$$x=\sum_{e\in E(x)}(x,\ e)e=\sum_{e\in E}(x,\ e)e.$$

定理 7.2.3 设 E 为 Hilbert 空间 H 中的就范直交系,则下列命题等价:

(1) E 是 H 的完全直交系;

(2) $x=\sum\limits_{e\in E}(x,\ e)e,\ x\in H$;

(3) $(x,\ y)=\sum\limits_{e\in E}(x,\ e)\overline{(y,\ e)},\ x,\ y\in H$;

(4) $\|x\|^2=\sum\limits_{e\in E}|(x,e)|^2,\ x\in H$;

(5) $(\mathrm{span}E)^{-}=H$.

证 在此,我们仅给出一种论证线路,用箭头示意如下:

$$\begin{array}{c}(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1),\\ \nwarrow\ \swarrow\\ (5)\end{array}$$

其中的每一步几乎都是显而易见的,详细说明留给读者完成.

定理 7.2.4(Riesz-Fischer) 设 $E:=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 的就范直交系.对于任意一族数$\{\alpha_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$,若存在 Λ 的至多可数子集 Λ_0 使得当 $\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0$ 时必有 $\alpha_\lambda=0$,且 $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_0}|\alpha_\lambda|^2<+\infty$,则存在惟一的 $x\in(\mathrm{span}E)^{-}$,使得 $\alpha_\lambda=(x,e_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$且 $x=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda$.

证 由于 E 为 Hilbert 空间 H 的就范直交系,因此$\{\alpha_\lambda e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda_0\}$中的元素两两正交,又注意到

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\|\alpha_\lambda e_\lambda\|^2=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}|\alpha_\lambda|^2<+\infty,$$

且 Λ_0 为至多可数集,则由引理知存在 $x\in H$ 使得

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda;$$

再由$(\mathrm{span}E)^{-}$的定义,即知 $x\in(\mathrm{span}E)^{-}$.

其次,由内积的连续性与内积关于第一变元的线性性知,对于任一$\tilde\lambda\in\Lambda$,若 $\tilde\lambda\in\Lambda_0$,则

$$(x,e_{\tilde\lambda})=\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda,e_{\tilde\lambda}\Big)=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda(e_\lambda,e_{\tilde\lambda})=\alpha_{\tilde\lambda};$$

若 $\tilde\lambda\in\Lambda\setminus\Lambda_0$,则

$$(x,e_{\tilde\lambda})=\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda,e_{\tilde\lambda}\Big)=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda(e_\lambda,e_{\tilde\lambda})=0=\alpha_{\tilde\lambda}.$$

即证得 $\alpha_\lambda=(x,e_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$.

下证惟一性.若又存在 $y\in H$ 满足定理结论中所需之条件.则由

$$y=\sum_{\lambda\in\Lambda}\alpha_\lambda e_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda_0}\alpha_\lambda e_\lambda$$

以及$(\mathrm{span}E)^{-}$的定义即知 $y\in(\mathrm{span}E)^{-}$.其次由

$$(y,e_\lambda)=\alpha_\lambda=(x,e_\lambda)\quad(\lambda\in\Lambda)$$

可知

$$(x-y,e_\lambda)=0\quad(\lambda\in\Lambda),$$

即$(x-y)\perp E$.

注意到$(\mathrm{span}E)^-$为 Hilbert 空间 H 的闭(内积)子空间,从而$(\mathrm{span}E)^-$为 H 的完备子空间,由定理 7.2.3,E 即为 Hilbert 空间$(\mathrm{Span}E)^-$的完全直交系.于是由 $x-y\in(\mathrm{span}E)^-$且$(x-y)\perp E$ 即得$x-y=0$,亦即 $y=x$.

定理证毕.

定理 7.2.5　任一非零内积空间必存在完全直交系.

证　设 H 为非零内积空间,令

$$M:=\{E\mid E\text{ 为}H\text{ 的就范直交系}\}.$$

由于 $H\neq\{0\}$,因此存在 $x\in H$ 且$x\neq0$,则$\left\{\dfrac{x}{\|x\|}\right\}$即为 H 的一个就范直交系,此即说明 $M\neq\varnothing$.现将集合的包含关系"$\subset$"作为 M 上的偏序关系.因为 H 中的任意多个就范直交系之并集仍为H 的就范直交系,所以对于 M 的任一全序子集W,W 中的一切元素(作为 H 的子集)之并集显然为 W 的一个上界.由 Zorn 引理,则 M 存在极大元F.

现说明此 F 必为H 的一个完全直交系.事实上,由极大元定义知 $F\in M$,即 F 是H 的就范直交系,若 F 不是完全的,则存在 $x\in H$,$x\neq0$ 且 $x\perp F$,由此,$F_1:=F\cup\left\{\dfrac{x}{\|x\|}\right\}\in M$ 且$F\subset F_1$,但 $F_1\neq F$,这与 F 为M 的极大元的定义矛盾.证毕.

注　在此,我们不加证明地给出如下重要结论:若 H 为 Hilbert 空间,则 H 的一切完全直交系等势.称此势为 H 的 Hilbert 维数或正交维数;若 $H=\{0\}$,则规定其正交维数为 0.

定义 7.2.3　设 H 与$\widetilde{H}$ 为同一数域F 上的两个内积空间,若存在由 H 到$\widetilde{H}$ 的满射T,满足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,\ x,\ y\in H,\ \alpha,\beta\in F;$$

$$(Tx,Ty)=(x,y),x,y\in H,$$

则称 T 为H 到$\widetilde{H}$ 上的(保范线性)同构映射,H 与 $\widetilde{H}$ 称为保范线性同构,简称为同构.

定理 7.2.6　同一数域上的两个 Hilbert 空间同构的充要条件是它们具

有相同的正交维数.

证 设 H 与 $\widetilde{H}$ 为两个 Hilbert 空间.

必要性.令 T 为 H 到 $\widetilde{H}$ 上的同构映射.由于 T 保持内积不变,因此 T 保持由内积导出的范数不变,即知线性映射 T 必为单射,又加之 T 为满射的条件,从而 T 为双射.特别地,H 的完全直交系与 $\widetilde{H}$ 的完全直交系对等(即等势),亦即 H 与 $\widetilde{H}$ 的正交维数相同.

充分性.设 H 与 $\widetilde{H}$ 的正交维数相同.当 $H=\widetilde{H}=\{0\}$时,结论显然成立.下设 H 与 $\widetilde{H}$ 均为非零 Hilbert 空间,E 与 $\widetilde{E}$ 分别为H 与 $\widetilde{H}$ 的完全直交系.由假定,E 与 $\widetilde{E}$ 等势,于是可用相同的指标集 Λ 来标记它们,即可记

$$E := \{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\},\ \widetilde{E} := \{\widetilde{e}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

由定理 7.2.3,我们有

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda,\ \|x\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2,\ x \in H.$$

定义映射 T:

$$Tx = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\widetilde{e}_\lambda,\ x \in H,$$

则由定理 7.2.1 与定理 7.2.4 可知,T 为由 H 到 $\widetilde{H}$ 的映射,且由内积关于第一个元素的线性与连续性可知 T 为线性映射.又

$$\|Tx\|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2 = \|x\|^2,\ x \in H,$$

即 T 是保范的,(由极化恒等式)因而保持内积不变,同时线性映射 T 的保范性说明 T 为单射.最后说明 T 为满射,事实上,对于任一 $\widetilde{x} = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda}(\widetilde{x}, \widetilde{e}_\lambda)\widetilde{e}_\lambda \in \widetilde{H}$, 若令

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(\widetilde{x}, \widetilde{e}_\lambda)e_\lambda \in H,$$

则再次由定理 7.2.4 可知,

$$(x, e_\lambda) = (\widetilde{x}, \widetilde{e}_\lambda)(\lambda \in \Lambda).$$

于是,

$$\widetilde{x} = \sum_{\lambda\in\Lambda}(\widetilde{x}, \widetilde{e}_\lambda)\widetilde{e}_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\widetilde{e}_\lambda = Tx.$$

由此证明了 T 确为H 到 $\widetilde{H}$ 上的同构映射,即 H 与 $\widetilde{H}$ 同构.

注 设 H 为 Hilbert 空间,且正交维数为 γ;又设 X 是势为γ 的集合,μ_c

为$(X,\mathscr{P}(X))$上的计数测度,则 H 与同一数域上的 Hilbert 空间 $L^2(\mu_c)$同构(其中 $L^2(\mu_c)$的完全直交系为$\{\chi_{\{x\}} \mid x\in X\}$).特别地,若 $\gamma=\aleph_0$,则 $L^2(\mu_c)=l^2$;若 $\gamma=n(\in\mathbf{N})$,则 $L^2(\mu_c)=\mathbf{C}^n$ 或 $\mathbf{R}^n$.

定理 7.2.7 设 H 为 Hilbert 空间,则 H 为可分空间的充要条件是 H 的正交维数$\leqslant\aleph_0$.

定理的证明留作练习.

§7.3 正交分解

定义 7.3.1 设 M 为内积空间 H 的子空间,$x\in H$,若存在 $y\in M$ 使得$(x-y)\perp M$,则称 y 为 x 在 M 上的(正交)投影.

注 易证,x 在 M 上的投影若存在则必惟一.

定理 7.3.1(投影定理) 设 M 为内积空间 H 中的完备子空间,则对于任一 $x\in H$,存在惟一的 $y\in M$ 使得 $x-y\perp M$,且

$$\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \mid z\in M\}.$$

证 由定义 7.3.1 后注,我们略去投影的惟一性的说明.

由条件,M 为 Hilbert 空间,因此,M 中存在完全直交系 E 使得

$$z=\sum_{e\in E}(z,e)e,\ z\in M.$$

对于任一取定的 $x\in H$,令

$$y=\sum_{e\in E}(x,e)e,$$

则由定理 7.2.1 与定理 7.2.4 可知 $y\in M$ 且成立

$$(y,e)=(x,e)\ (e\in E).$$

即$(x-y)\perp E$,又由 $M=(\operatorname{span}E)^-$ 即知$(x-y)\perp M$.此外,对于 $z\in M$,

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|x\|^2-(x,z)-\overline{(x,z)}+\|z\|^2\\ &= \|x\|^2-\sum_{e\in E}(x,e)\overline{(z,e)}-\sum_{e\in E}\overline{(x,e)}(z,e)+\sum_{e\in E}|(z,e)|^2\\ &= \|x\|^2+\sum_{e\in E}|(x,e)-(z,e)|^2-\sum_{e\in E}|(x,e)|^2.\end{aligned}$$

由此可见,当且仅当$(z,e)=(x,e)\ (e\in E)$亦即 $z=y$ 时,上式取值最小.证毕.

定义 7.3.2 设 M 为内积空间 H 的子集,记

$$M^{\perp}:=\{x\in H\mid x\perp M\},$$

则称 $M^{\perp}$ 为 M 的正交补集.

定理 7.3.2 设 M 为内积空间 H 的子集,则

(1) $M^{\perp}$ 为 H 的闭子空间;

(2) $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}=((\operatorname{span}M)^{-})^{\perp}$.

证明留作练习.

定义 7.3.3 设 X 为线性空间,Y,Z 为 X 的子空间.若对于任一 $x\in X$,存在惟一的 $y\in Y,z\in Z$ 使得 $x=y+z$,则称 X 是 Y 与 Z 的直接和,记为 $X=Y\dotplus Z$,Y 和 Z 称为 X 的一对互补子空间,Z 称为 Y 的代数补子空间.

显然,此时必有 $Y\cap Z=\{0\}$.反之,若 $Y\cap Z=\{0\}$,且对于任一 $x\in X$,存在 $y\in Y,z\in Z$ 使得 $x=y+z$,则满足此等式的 $y\in Y,z\in Z$ 必惟一.

定义 7.3.4 设 M,N 为内积空间 H 的子空间,$M\perp N$.若对于任一 $x\in H$,存在 $y\in M,z\in N$ 使得 $x=y+z$,则称 H 是 M 与 N 的直交和,记为 $H=M\oplus N$.

由于此时必有 $M\cap N=\{0\}$,且内积空间必为线性空间,所以直交和必为直接和.

定理 7.3.3(正交分解定理) 设 M 为 Hibert 空间 H 的闭子空间,则

$$H=M\oplus M^{\perp}.$$

证 由条件可知,M 为 H 的完备子空间,于是由投影定理可知,对于任一 $x\in H$,存在 $y\in M$ 使得 $(x-y)\perp M$.记 $z=x-y$,则 $x=y+z$,其中 $z\in M^{\perp}$.而由 $M^{\perp}$ 的定义,显然有 $M\perp M^{\perp}$,且由定理 7.3.2(1)知,$M^{\perp}$ 必为 H 的(闭)子空间.此即说明 $H=M\oplus M^{\perp}$.

定理 7.3.4(Riesz 表示定理) 设 H 为 Hilbert 空间,则对于 H 上的任一有界线性泛函 f,存在惟一的 $z\in H$ 使得

$$f(x)=(x,z),x\in H,$$

且 $\|f\|=\|z\|$.

证 存在性.设 f 为 Hilbert 空间的有界线性泛函.若 $\mathcal{N}(f)=H$,则取 $z=0$ 即可.下设 $\mathcal{N}(f)\neq H$,则存在 $x_0\in\mathcal{N}(f)^c$.由定理 6.3.4 知,$\mathcal{N}(f)$ 是 H 的闭子空间.由于 H 完备,因此 $\mathcal{N}(f)$ 为 H 的完备子空间,于是由投影定理,存在 $y_0\in\mathcal{N}(f)$ 使得

$$x_0-y_0=z_0\perp\mathcal{N}(f).$$

显然,$z_0\notin\mathcal{N}(f)$,且

$$x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0\in \mathcal{N}(f),x\in H,$$

从而

$$z_0\perp\left(x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0\right),x\in H,$$

即

$$\left(x-\frac{f(x)}{f(z_0)}z_0,z_0\right)=0,x\in H.$$

经简单运算整理,得

$$f(x)=\left(x,\frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2}z_0\right),x\in H,$$

记 $z=\dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2}z_0$,即证明了存在性.

惟一性.若 $\tilde{z}\in H$,使得

$$f(x)=(x,\tilde{z}),x\in H,$$

即

$$(x,z)=(x,\tilde{z}),x\in H,$$

亦即

$$(x,\tilde{z}-z)=0,x\in H.$$

特别取 $x=\tilde{z}-z$ 即知 $\|\tilde{z}-z\|=0$,从而 $\tilde{z}=z$.

保范性.由 Schwarz 不等式

$$|f(x)|=|(x,z)|\leqslant\|z\|\|x\|,x\in H,$$

可知 $\|f\|\leqslant\|z\|$.另一方面,特别取 $x=z$,则由

$$\|f\|\|z\|\geqslant|f(z)|=\|z\|^2$$

即得 $\|f\|\geqslant\|z\|$.从而证得 $\|f\|=\|z\|$.

至此定理证毕.

§7.4 内积空间中的共轭空间与共轭算子

定义 7.4.1 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函全体所成的 Banach 空间

称为 H 的共轭空间，记为 H^*.

作映射

$$T: H \to H^*,$$
$$z \mapsto Tz = f_z,$$

则由 Riesz 表示定理，T 是 H 到 H^* 上的一一对应，且 $\|z\| = \|Tz\|$. 此外，对于 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}, y, z \in H$ 有

$$T(\alpha y + \beta z)(x) = f_{\alpha y + \beta z}(x) = (x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$$
$$= \overline{\alpha} f_y(x) + \overline{\beta} f_z(x) = (\overline{\alpha} Ty + \overline{\beta} Tz)(x), x \in H.$$

所以

$$T(\alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} Ty + \overline{\beta} Tz,$$

即 T 为共轭线性的. 我们称 T 为 H 到 H^* 上的保范共轭线性同构映射. 在这种同构意义下，今后将 z 和 f_z 看成一致，这样，H 和 H^* 就一致化了，记为 $H = H^*$，故称 H 为自共轭空间.

但要注意的是，对于 $\alpha \in \mathbf{C}$ 及 $z \in H$，若将 αz 视作泛函时，则它在 x 点的值是泛函 z 在 x 点的值乘以 $\overline{\alpha}$，这与将 H 视作赋范线性空间时的共轭空间 H' 的情况不同.

定义 7.4.2　设 H 和 G 为两个内积空间，$A \in \mathscr{B}(H, G)$，若存在 $B: G \to H$ 满足

$$(Ax, y) = (x, By), x \in H, y \in G,$$

则称 B 为 A 的共轭算子或伴随算子.

定理 7.4.1　设 H 为 Hilbert 空间，G 为内积空间，则对于任一 $A \in \mathscr{B}(H, G)$，存在惟一的共轭算子 $A^* \in \mathscr{B}(G, H)$，且 $\|A^*\| = \|A\|$.

证　设 $A \in \mathscr{B}(H, G)$，对于任一 $y \in G$，定义 $f: H \to \mathbf{C}$，

$$f(x) = (Ax, y), x \in H.$$

由 A 以及内积关于第一变元的线性性可知 f 为 H 上的线性泛函，又由

$$|f(x)| \leqslant \|Ax\| \|y\| \leqslant \|A\| \|y\| \|x\|, x \in H,$$

可知 f 有界，且 $\|f\| \leqslant \|A\| \|y\|$. 注意到 H 为 Hilbert 空间，于是由 Riesz 表示定理，存在惟一的 $y^* \in H$ 使得 $\|f\| = \|y^*\|$，且

$$f(x) = (x, y^*), x \in H.$$

定义 $A^*:G\to H$,

$$A^*y=y^*,y\in G,$$

则有

$$(Ax,y)=(x,A^*y),x\in H,y\in G.$$

下证满足上式的 $A^*\in\mathscr{B}(G,H)$且惟一.

首先证明"惟一性".若映射 $B:G\to H$ 满足

$$(x,By)=(Ax,y)=(x,A^*y),x\in H,y\in G,$$

则

$$(x,By-A^*y)=0,x\in H,y\in G.$$

由于上式对一切 $x\in H$ 成立,因此 $By-A^*y=0(y\in G)$,即 $By=A^*y$ $(y\in G)$,亦即 $B=A^*$.

其次证明 A^* 为线性算子.对任意的 $y,z\in G,\alpha,\beta\in\mathbf{C}$,对任一 $x\in H$,有

$$\begin{aligned}(x,A^*(\alpha y+\beta z))=(Ax,\alpha y+\beta z)&=\overline{\alpha}(Ax,y)+\overline{\beta}(Ax,z)\\&=\overline{\alpha}(x,A^*y)+\overline{\beta}(x,A^*z)=(x,\alpha A^*y)+(x,\beta A^*z)\\&=(x,\alpha A^*y+\beta A^*z),\end{aligned}$$

由于上式对一切 $x\in H$ 成立,因此

$$A^*(\alpha y+\beta z)=\alpha A^*y+\beta A^*z,\ y,z\in G,\alpha,\beta\in\mathbf{C}.$$

最后证明 A^*有界,且 $\|A^*\|=\|A\|$.事实上,由

$$\|A^*y\|=\|y^*\|(=\|f\|)\leqslant\|A\|\|y\|,y\in G,$$

即知 A^*有界,且 $\|A^*\|\leqslant\|A\|$.另一方面,由

$$\|Ax\|^2=|(Ax,Ax)|=|(x,A^*(Ax))|\leqslant\|x\|\|A^*\|\|Ax\|,x\in H,$$

即 $\|Ax\|\leqslant\|A^*\|\|x\|(x\in H)$,于是 $\|A\|\leqslant\|A^*\|$.

定理证毕.

注 当 $H=G$ 为 n 维内积空间时,在给定基下,A 与 $n\times n$ 矩阵相对应,A^* 即对应于相应的共轭转置矩阵.

定理 7.4.2(星运算) 设 H,K 为 Hilbert 空间,G 为内积空间,$A,B\in\mathscr{B}(H,G),C\in\mathscr{B}(K,H),\alpha,\beta\in\mathbf{C}$.则有

(1) $(\alpha A+\beta B)^*=\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}B^*$;

(2) $A^{**}=A$;

(3) $(AC)^* = C^* A^*$;

(4) $\| A^* A \| = \| A \|^2 = \| AA^* \|$;

(5) 设 $A_n \in \mathscr{B}(H,G)(n=1,2,\cdots)$, 且 $A_n \to A(n\to\infty)$, 则 $A_n^* \to A^*(n\to\infty)$.

定理 7.4.3 设 H,G 为 Hilbert 空间, $A\in\mathscr{B}(H,G)$. 则

(1) $\mathscr{N}(A) = \mathscr{R}(A^*)^\perp$;

(2) $\mathscr{N}(A)^\perp = \mathscr{R}(A^*)^-$;

(3) $\mathscr{N}(A^*) = \mathscr{R}(A)^\perp$;

(4) $\mathscr{N}(A^*)^\perp = \mathscr{R}(A)^-$.

上述两个定理的证明留作练习.

例　考虑方程

$$Ax = y, \tag{1}$$

$$A^* x = 0, \tag{2}$$

若 $\mathscr{R}(A)$是闭的,则由定理 7.4.3(4)即知:方程(1)有解的充要条件是 y 与方程(2)的一切解正交.

§7.5　自伴算子、酉算子和正常算子

定义 7.5.1　设 H 为 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(H,H)$.

(1) 若 $T=T^*$,则称 T 为 H 上的自伴(或自共轭、Hermitian)算子.

(2) 若 T 为双射,且 $T^*=T^{-1}$,则称 T 为 H 上的酉算子.

(3) 若 $T^*T=TT^*$,则称 T 为 H 上的正常(或正规)算子.

由自伴算子的定义可知,

$$T = T^* \Leftrightarrow (Tx,y) = (x,Ty), x,y\in H.$$

显然,若 T 为自伴算子或酉算子,则 T 为正常算子.

注　设 $T:\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 为一线性算子(线性变换),在给定的基下,则 T 和 T^* 分别表为 $n\times n$ 矩阵 A 和 $\overline{A}^T$,矩阵 A 称为

Hermitian 阵,　当 T 是自伴算子(此时 $A=\overline{A}^T$);

酉阵,　　　　当 T 是酉算子(此时 $A^T=A^{-1}$);

正常阵,　　　当 T 是正常算子(此时 $\overline{A}^TA=A\overline{A}^T$).

类似地,当 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 为一线性算子,则称 A 为

(实) 对称阵, 当 T 是自伴算子(此时 $A = A^T$);

正交阵, 当 T 是酉算子(此时 $A^T = A^{-1}$).

引理(关于算子的极化恒等式) 设 H,G 为内积空间,$A,B\in\mathscr{B}(H,G)$. 则对于任意的 $x,y\in H$,有

$$\begin{aligned}&(Ax,By)+(Ay,Bx)\\&=\frac{1}{2}\{(A(x+y),B(x+y))-(A(x-y),B(x-y))\};\\&(Ax,By)-(Ay,Bx)\\&=\frac{\mathrm{i}}{2}\{(A(x+\mathrm{i}y),B(x+\mathrm{i}y))-(A(x-\mathrm{i}y),B(x-\mathrm{i}y))\};\\&(Ax,By)=\frac{1}{4}\{(A(x+y),B(x+y))-(A(x-y),B(x-y))\\&\qquad+\mathrm{i}(A(x+y),B(x+y))-\mathrm{i}(A(x-y),B(x-y)\}.\end{aligned}$$

证 易知,对于任意的 $x,y\in H$ 及 $\alpha\in\mathbf{C}$,有

$$\begin{aligned}&(A(x+\alpha y),B(x+\alpha y))\\&=(Ax,Bx)+\alpha(Ay,Bx)+\overline{\alpha}(Ax,By)+|\alpha|^2(Ay,By).\end{aligned}$$

分别取 $\alpha=\pm1,\pm\mathrm{i}$,然后经整理即得所证.

推论 1 设 H 为复内积空间,$T\in\mathscr{B}(H,H)$. 则 $T=0$ 的充要条件是

$$(Tx,x)=0,x\in H.$$

证 必要性为显然. 下证充分性. 在引理的第三个等式中特别取 $A=T$, $B=I,y=Tx$,由充分性条件即得

$$(Tx,Tx)=0,x\in H,$$

由此即知 $T=0$.

推论 2 设 H,G 为内积空间,$A,B\in\mathscr{B}(H,G)$. 则

$$\|Ax\|=\|Bx\|,x\in H$$

的充要条件是

$$(Ax,Ay)=(Bx,By),\ x,y\in H.$$

证 充分性为显然. 下证必要性.

若 G 为实内积空间,则在引理的第一个等式中取 $A=B$,由必要性条件

即得

$$4(Ax,Ay) = \|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2$$
$$= \|B(x+y)\|^2 - \|B(x-y)\|^2$$
$$= 4(Bx,By), \quad x,y \in H.$$

若 G 为复内积空间,则在引理的第三个等式中取 $A=B$ 同理即可证得.

推论 3 设 H 为 Hilbert 空间,$A,B\in\mathscr{B}(H,H)$.则

$$\|Ax\| = \|Bx\|, x \in H$$

的充要条件是

$$A^*A = B^*B.$$

证 注意到

$$(Ax,Ay) = (x,A^*Ay),(Bx,By) = (x,B^*By),x,y \in H,$$

于是由推论 2 即得所证.

定理 7.5.1 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(H,H)$.则

(1) 当 H 为复空间时,T 为自伴算子的充要条件是$(Tx,x)(x\in H)$为实数;

(2) T 为酉算子的充要条件是 T 为映上的保范算子(即 $\|Tx\| = \|x\|$, $x\in H$);

(3) T 为正常算子的充要条件是 $\|Tx\| = \|T^*x\| \quad (x\in H)$.

证 (1)必要性由下式即得

$$(Tx,x) = (x,T^*x) = (x,Tx) = \overline{(Tx,x)},x \in H.$$

充分性. 由条件可知,

$$(Tx,x) = \overline{(Tx,x)} = (x,Tx) = (T^*x,x),x \in H,$$

注意到 H 为复空间,于是由引理之推论 1 即知 $T=T^*$,即 T 为自伴算子.

(2) 必要性. 由酉算子定义知 T 为映上的,且由引理之推论 3(特别取 $B=I$,注意到 $I^*=I$)即知 T 是保范的.

充分性. 由 T 为保范的线性算子知T 为单射,且由引理之推论 3 知 $T^*T=I$. 又因为 T 为满射,所以 T 为双射,故 T 的逆映射 T^{-1}存在,且由此即知 $T^*=T^{-1}$.

(3) 令引理之推论 3 中的 $A=T,B=T^*$,且注意到 $B^*=A^{**}=A$,即得所证.

定理 7.5.2　设 H 为 Hilbert 空间，$T, T_n \in \mathscr{B}(H,H)(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. 则当$(T_n)$分别为自伴算子、酉算子与正常算子序列时，$T$ 分别为相应的自伴算子、酉算子与正常算子.

证　注意到，

$$\| T_n x - Tx \| = \| (T_n - T)x \| \leqslant \| T_n - T \| \, \| x \|, x \in H \quad (n = 1,2,\cdots),$$

因此当$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ 时，必有

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx, x \in H.$$

由此易证得定理之结论(具体过程留给读者完成).

定理 7.5.3　设 H 为 Hilbert 空间，$T, S \in \mathscr{B}(H,H)$.

(1) 若 T 为自伴算子，则对于任一 $\alpha \in \mathbf{R}$，αT 为自伴算子；
若 T 为酉算子，则对于任一 $\alpha \in \mathbf{C}$ 且 $|\alpha| = 1$，αT 为酉算子；
若 T 为正常算子，则对于任一 $\alpha \in \mathbf{C}$，αT 为正常算子.

(2) 若 T, S 为自伴算子，则 $T+S$ 为自伴算子；
若 T, S 为正常算子，则 $T+S$ 为正常算子的充要条件是

$$TS^* + ST^* = S^*T + T^*S.$$

(3) 若 T, S 为自伴算子，则 TS 为自伴算子的充要条件是 $TS = ST$；
若 T, S 为酉算子，则 TS 为酉算子；
若 T, S 为正常算子，且 $TS^* = S^*T$, $ST^* = T^*S$，则 TS 为正常算子.

(4) T 为自伴算子的充要条件是 T^* 为自伴算子；
T 为酉算子的充要条件是 T^* 为酉算子，且有$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$；
T 为正常算子的充要条件是 T^* 为正常算子.

定理 7.5.3 中的每一个结论均可由定义及通过简单的演算得到，具体验证留给读者完成.

注　作为定理 7.5.3(2)的特例，我们有

1°　设 H 为 Hilbert 空间，$T, S \in \mathscr{B}(H,H)$，$T^* = T$，$S^* = -S$. 则 $T+S$ 为正常算子的充要条件是 $TS = ST$.

2°　若 H 为复 Hilbert 空间，$T, S \in \mathscr{B}(H,H)$，$T^* = T$，$S^* = S$. 则 $T+\mathrm{i}S$ 为正常算子的充要条件是 $TS = ST$.

习　题

1. 设 H 为内积空间，$x, y \in H$，证明：由内积导出的范数满足：

(1) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$;

(2) 若 H 为复内积空间,则

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2);$$

(3) 若 H 为实内积空间,则

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

2. 设(x_n),(y_n)为内积空间 H 中点列,$x_n\to x$ 且 $y_n\to y$,证明:$(x_n,y_n)\to(x,y)$.

3. 设(x_n)为内积空间 H 中点列,$\|x_n\|\to\|x\|$,且$(x_n,y)\to(x,y)(y\in H)$,证明:$x_n\to x$.

4. 设 H 为实内积空间,$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$,证明:$x\perp y$,且证明对于任一复(非零)内积空间,此结论必不成立.

5. 设 H 为内积空间,E 为 H 的稠密集,证明:若 $x\perp E$,则 $x=0$.

6. 证明:$C[a,b]$不是内积空间.

7. 设 H 为内积空间,$x,y\in H$,证明:$\|y\|\leqslant\|\alpha x+y\|$ 对一切 $\alpha\in\mathbf{C}$ 成立的充要条件为$(x,y)=0$.

8. 证明:实内积空间 H 上的刚体运动必可分解为平移与保角线性变换.

9. 设 E 为 Hilbert 空间 H 中的就范直交系,证明下列命题等价:

(1) E 是 H 的完全直交系;

(2) $x=\sum_{e\in E}(x,e)e,x\in H$;

(3) $(x,y)=\sum_{e\in E}(x,e)\overline{(y,e)},x,y\in H$;

(4) $\|x\|^2=\sum_{e\in E}|(x,e)|^2,x\in H$;

(5) $(\mathrm{span}E)^-=H$.

10. 设 E 为 Hilbert 空间 H 中的就范直交系,$D\subset H$ 且 $D^-=H$,证明:若成立

$$\|x\|^2=\sum_{e\in E}|(x,e)|^2,x\in D,$$

则 E 是完全直交系.

11. 设 H 为 Hilbert 空间,则 H 为可分空间的充要条件是 H 的正交维数$\leqslant\aleph_0$.

12. 设

$$M:=\{x\mid x=(x_n)\in l^2,\text{且 }x_{2n}=0,n=1,2,\cdots\},$$

证明:M 是 l^2 的闭子空间,且求出 $M^\perp$.

13. 设 M 为内积空间 H 的子空间,$x\in H$,证明:x 在 M 上的投影若存在则必惟一.

14. 设 $E:=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$为内积空间 H 中的就范直交系,证明:对于任一 $x\in H$,x 在 span$E$ 上的投影存在且为 $\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k$.

15. 设 M 为内积空间 H 的子集,证明:

(1) $M^{\perp}$为H的闭子空间；

(2) $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}=((\overline{\text{span}M}))^{\perp}$.

16. 设H为Hilbert空间，$M\subset H$且$M\neq\varnothing$，证明：$(M^{\perp})^{\perp}$是X中包含M的最小闭子空间.

17. 设H为Hilbert空间，M为H的闭子空间，$x_0\in H$，证明：

$$\min\{\|x-x_0\| \mid x\in M\}=\max\{(x_0,y)\mid y\in M^{\perp},\|y\|=1\}.$$

18. 设H为Hilbert空间，M为H的闭子空间，证明：$\dim(M^{\perp})=1$的充要条件是存在H上的非零有界线性泛函f使得$M=\mathcal{N}(f)$.

19. 证明：自共轭的内积空间必为Hilbert空间.

20. 设H为Hilbert空间，$A\in\mathcal{B}(H,H)$，证明：$\mathcal{R}(A)$为有限维的充要条件是A可表为

$$Ax=\sum_{j=1}^{n}(x,v_j)w_j,\ x\in H.$$

21. 设$\{e_n\}$为Hilbert空间H的完全直交系，A是由H到H中的线性算子，且满足

$$Ae_n=e_{n+1}(n=1,2,\cdots),$$

试求：$\mathcal{R}(A)$，$\mathcal{N}(A)$，$\|A\|$以及A^*.

22. 设H为Hilbert空间，$T\in\mathcal{B}(H,H)$且$\|T\|\leqslant 1$，证明：

$$\{x\mid Tx=x,\ x\in H\}=\{x\mid T^*x=x,\ x\in H\}.$$

23. 设H,K为Hilbert空间，G为内积空间，$A,B\in\mathcal{B}(H,G)$，$C\in\mathcal{B}(K,H)$，$\alpha,\beta\in$ **C**. 证明：

(1) $(\alpha A+\beta B)^*=\bar{\alpha}A^*+\bar{\beta}B^*$；

(2) $A^{**}=A$；

(3) $(AC)^*=C^*A^*$；

(4) $\|A^*A\|=\|A\|^2=\|AA^*\|$；

(5) 设$A_n\in\mathcal{B}(H,G)(n=1,2,\cdots)$，且$A_n\to A(n\to\infty)$，则$A_n^*\to A^*(n\to\infty)$.

24. 设H为Hilbert空间，$A\in\mathcal{B}(H,H)$，$T=I+A^*A$，证明：T是单射.

25. 设H,G为Hilbert空间，$A\in\mathcal{B}(H,G)$，证明：

(1) $\mathcal{N}(A)=\mathcal{R}(A^*)^{\perp}$；

(2) $\mathcal{N}(A)^{\perp}=\overline{\mathcal{R}(A^*)}$；

(3) $\mathcal{N}(A^*)=\mathcal{R}(A)^{\perp}$；

(4) $\mathcal{N}(A^*)^{\perp}=\overline{\mathcal{R}(A)}$.

26. 设H为复Hilbert空间，$T\in\mathcal{B}(H,H)$，证明：

$$T=-T^*\Leftrightarrow\text{Re}((Tx,x))=0(x\in H).$$

27. 设H为实Hilbert空间，$T\in\mathcal{B}(H,H)$且$T=T^*$，证明：

$$T=0\Leftrightarrow(Tx,x)=0(x\in H).$$

28. 设 H 为 Hilbert 空间，$T, T_n \in \mathscr{B}(H,H)(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. 证明：当 (T_n) 分别为自伴算子、酉算子与正常算子序列时，T 分别为相应的自伴算子、酉算子与正常算子.

29. 设 H 为 Hilbert 空间，$T\in\mathscr{B}(H,H)$. 证明：

(1) T 为自伴算子的充要条件是 T^* 为自伴算子；

(2) T 为酉算子的充要条件是 T^* 为酉算子，且有 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$；

(3) T 为正常算子的充要条件是 T^* 为正常算子.

30. 设 H 为 Hilbert 空间，$T,S\in\mathscr{B}(H,H)$. 证明：

(1) 若 T,S 为正常算子，则 $T+S$ 为正常算子的充要条件是

$$TS^* + ST^* = S^*T + T^*S;$$

(2) 若 $T^*=T, S^*=-S$，则 $T+S$ 为正常算子的充要条件是 $TS=ST$；

(3) 若 H 为复空间，$T^*=T, S^*=S$，则 $T+\mathrm{i}S$ 为正常算子的充要条件是 $TS=ST$.

第八章　泛函分析的基本定理

§8.1　Hahn-Banach 延拓定理

定义 8.1.1　设 X 为实(或复)数域 F 上的线性空间，$p: X \to \mathbf{R}$ 满足

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad x, y \in X,$$

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \alpha \in F, x \in X,$$

则称 p 为线性空间 X 上的一个"半范数".

由半范数的定义易知：$p(0)=0$，且 $p(x) \geqslant 0 \quad (x \in X)$.

定理 8.1.1(实线性空间中的 H-B 延拓定理)　设 p 为实线性空间 X 上的半范数，Z 为 X 的子空间，f 为 Z 上的线性泛函，满足

$$f(x) \leqslant p(x), \quad x \in Z,$$

则存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$，使得

(1) $\tilde{f}$ 是 f 的延拓，即 $\tilde{f}(x) = f(x) \quad (x \in Z)$;

(2) $\tilde{f}(x) \leqslant p(x) \quad (x \in X)$.

证　设 $\mathscr{F}$ 为满足下述三个条件的线性泛函 g 全体所成之集：

(i) g 的定义域 $\mathscr{D}(g)$ 是 X 的线性子空间；

(ii) g 是 f 的延拓，即 $\mathscr{D}(g) \supset Z$，且 $g(x) = f(x) \quad (x \in Z)$;

(iii) $g(x) \leqslant p(x) (x \in \mathscr{D}(g))$.

由 $f \in \mathscr{F}$ 可知 $\mathscr{F} \neq \varnothing$. 在 $\mathscr{F}$ 中定义偏序关系：

$$g_1 \prec g_2 := \mathscr{D}(g_1) \subset \mathscr{D}(g_2), \text{且 } g_2(x) = g_1(x) \quad (x \in \mathscr{D}(g_1)),$$

由此 $\mathscr{F}$ 便成为一非空偏序集.

设 Q 为 $\mathscr{F}$ 中的任一全序子集，令 $\mathscr{D} = \bigcup_{g \in Q} \mathscr{D}(g)$，且定义 $\mathscr{D}$ 上的函数 h：对任一 $x \in \mathscr{D}$，存在 $g \in Q$ 使得 $x \in \mathscr{D}(g)$，规定 $h(x) = g(x)$.

首先，注意到 Q 为全序集，由此易知：

1°　若 $x \in \mathscr{D}$，且存在 $g_1, g_2 \in Q$ 使得 $x \in \mathscr{D}(g_1) \cap \mathscr{D}(g_2)$，不妨设 $g_1 \prec g_2$，则必有 $g_1(x) = g_2(x)$. 此即说明如上定义的 h 有意义.

2°　对于任意的 $x, y \in \mathscr{D}$，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，则存在 $g_1, g_2 \in Q$ 使得 $x \in \mathscr{D}(g_1)$，$y \in \mathscr{D}(g_2)$，不妨设 $g_1 \prec g_2$，则必有 $x, y \in \mathscr{D}(g_2)$，由于 $\mathscr{D}(g_2)$ 为 X 的线性子

空间,因此 $\alpha x+\beta y\in\mathscr{D}(g_2)$,从而 $\alpha x+\beta y\in\mathscr{D}$,此即说明 $\mathscr{D}$ 也是 X 的线性子空间;同时有

$$h(\alpha x+\beta y)=g_2(\alpha x+\beta y)=\alpha g_2(x)+\beta g_2(y)=\alpha h(x)+\beta h(y),$$

即 h 为 $\mathscr{D}$ 上的线性泛函.

其次,h 显然是 f 的延拓,且对任一 $x\in\mathscr{D}$,则存在 $g\in Q$ 使得 $h(x)=g(x)\leqslant p(x)$.

上述讨论说明了 $h\in\mathscr{F}$. 同时由 $\mathscr{D}$ 以及 h 的定义易知,h 是 Q 的一个上界. 于是由 Zorn 引理,$\mathscr{F}$ 存在极大元,即存在满足条件(i)~(iii)的 f 的“极大”线性延拓 $\tilde{f}$.

下证 $\mathscr{D}(\tilde{f})=X$. 用反证法. 若 $\mathscr{D}(\tilde{f})$ 为 X 的真子空间,则存在 $x_0\in X\setminus\mathscr{D}(\tilde{f})$,令 $Y:=\mathscr{D}(\tilde{f})\dotplus\mathrm{span}\{x_0\}$,即

$$Y=\{y\mid y=z+\alpha x_0,z\in\mathscr{D}(\tilde{f}),\alpha\in\mathbf{R}\},$$

则 Y 为 X 的线性子空间,且 $\mathscr{D}(\tilde{f})$ 为 Y 的真子空间. 此时,若能证明:存在 Y 上的线性泛函 $\tilde{g}$ 成为 $\tilde{f}$ 的延拓,即 $\tilde{f}\prec\tilde{g}$ 且 $\tilde{g}\neq\tilde{f}$,则由 $f\prec\tilde{f}$ 可知 $f\prec\tilde{g}$,即 $\tilde{g}\in\mathscr{F}$,由此与 $\tilde{f}$ 是 $\mathscr{F}$ 的极大元矛盾.

现运用分析的方法来说明上述 $\tilde{g}$ 的存在性. 若如此的 $\tilde{g}$ 存在,则由(1)应有

$$\tilde{g}(y)=\tilde{g}(z+\alpha x_0)=\tilde{g}(z)+\alpha\tilde{g}(x_0)=\tilde{f}(z)+\alpha\tilde{g}(x_0),$$

注意到,由 $y\in Y$ 表为 $z+\alpha x_0$ $(z\in\mathscr{D}(\tilde{f}),\alpha\in\mathbf{R})$ 的惟一性以及 $\tilde{f}$ 的线性性易知,由

$$\tilde{g}(y)=\tilde{f}(z)+\alpha\tilde{g}(x_0)$$

定义的 $\tilde{g}$ 确是线性泛函;又由(2)应有

$$\tilde{g}(y)\leqslant p(y),y\in Y,$$

即所定义的 $\tilde{g}(x_0)$ 应满足

$$\tilde{f}(z)+\alpha\tilde{g}(x_0)\leqslant p(z+\alpha x_0),z\in\mathscr{D}(\tilde{f}),\alpha\in\mathbf{R}.$$

由以上分析可见,所述的 $\tilde{g}$ 的存在与否,仅取决于是否存在满足上述要求的常数 $\tilde{g}(x_0)$. 当 $\alpha=0$ 时,无论 $\tilde{g}(x_0)$ 如何取值,上式恒为 $\tilde{f}(z)\leqslant p(z)$ $(z\in\mathscr{D}(\tilde{f}))$. 由此可知,我们只需考虑 $\alpha\neq0$ 的情形,而这等价于要求 $\tilde{g}(x_0)$ 应满足

$$\begin{cases}\tilde{f}\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)+\tilde{g}(x_0)\leqslant p\left(\dfrac{z}{\alpha}+x_0\right), & \alpha>0,\\ \tilde{f}\left(-\dfrac{z}{\alpha}\right)-\tilde{g}(x_0)\leqslant p\left(-\dfrac{z}{\alpha}-x_0\right), & \alpha<0,\end{cases}\quad z\in\mathscr{D}(\tilde{f}),$$

亦即要求 $\tilde{g}(x_0)$满足

$$-p(z'-x_0)+\tilde{f}(z')\leqslant\tilde{g}(x_0)\leqslant p(z''+x_0)-\tilde{f}(z''),z',\ z''\in\mathscr{D}(\tilde{f}).$$

注意到,

$$\tilde{f}(z')+\tilde{f}(z'')=\tilde{f}(z'+z'')\leqslant p(z'+z'')\leqslant p(z'-x_0)+p(z''+x_0),$$
$$z',z''\in\mathscr{D}(\tilde{f}),$$

即恒有

$$-p(z'-x_0)+\tilde{f}(z')\leqslant p(z''+x_0)-\tilde{f}(z''),z',z''\in\mathscr{D}(\tilde{f}),$$

因此必可取到 $\tilde{g}(x_0)$使得

$$\sup_{z\in\mathscr{D}(\tilde{f})}\{-p(z-x_0)+\tilde{f}(z)\}\leqslant\tilde{g}(x_0)\leqslant\sup_{z\in\mathscr{D}(\tilde{f})}\{p(z+x_0)-\tilde{f}(z)\}.$$

至此定理证毕.

注 在定理8.1.1中,

$$f(x)\leqslant p(x)(x\in Z)\Leftrightarrow|f(x)|\leqslant p(x)(x\in Z),$$
$$\tilde{f}(x)\leqslant p(x)(x\in X)\Leftrightarrow|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)(x\in X).$$

定理8.1.2(复线性空间中的H-B延拓定理) 设 p 为复线性空间 X 上的半范数,Z 为 X 的子空间,f 为 Z 上的线性泛函,满足

$$|f(x)|\leqslant p(x),\ x\in Z,$$

则存在 X 上的线性泛函$\tilde{f}$,使得

(1) $\tilde{f}$ 是 f 的延拓,即 $\tilde{f}(x)=f(x)\quad(x\in Z)$;

(2) $|\tilde{f}(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in X)$.

证 记

$$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)\quad(x\in Z),$$

其中 $f_1(x)$与 $f_2(x)$分别为 $f(x)$的实部与虚部,由此定义了映射 $f_k:Z\to\mathbf{R}(k=1,2)$.现考察 f_k 应具有的性质.

首先,对于 $a,b\in\mathbf{R},x,y\in Z$.一方面,由定义

$$f(ax+by)=f_1(ax+by)+\mathrm{i}f_2(ax+by);$$

另一方面,由于 f 为线性泛函,因此

$$\begin{aligned}f(ax+by)&=af(x)+bf(y)\\&=a(f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x))+b(f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x))\\&=(af_2(x)+bf_1(y))+\mathrm{i}(af_2(x)+bf_2(y)).\end{aligned}$$

比较实部与虚部,即得

$$f_k(ax+by)=af_k(x)+bf_k(y),a,b\in\mathbf{R},\ x,y\in Z,\ k=1,2.$$

此即说明,若将数乘限制在 $\mathbf{R}$ 中,则 f_k 为实线性"泛函".

其次,对于 $\alpha=a+b\mathrm{i}\in\mathbf{C}$(其中 $a,b\in\mathbf{R},b\neq0$),$x\in Z$.我们有

$$\begin{aligned}f(\alpha x)&=f_1(\alpha x)+\mathrm{i}f_2(\alpha x)\\&=af_1(x)+bf_1(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}(af_2(x)+bf_2(\mathrm{i}x));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\alpha x)&=\alpha f(x)=(a+b\mathrm{i})(f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x))\\&=af_1(x)-bf_2(x)+\mathrm{i}(af_2(x)+bf_1(x)).\end{aligned}$$

比较实部与虚部,即得

$$\begin{aligned}f(\alpha x)=\alpha f(x)&\Leftrightarrow f_2(x)=-f_1(\mathrm{i}x),f_1(x)=f_2(\mathrm{i}x),\\&\Leftrightarrow f_2(x)=-f_1(\mathrm{i}x).\end{aligned}$$

经由以上讨论可知:f 为复线性当且仅当 f_1 与 f_2 均为实线性且满足

$$f_2(x)=-f_1(\mathrm{i}x)(x\in Z),$$

于是

$$f(x)=f_1(x)-\mathrm{i}f_1(\mathrm{i}x),x\in Z,$$

其中 $f_1:Z\to\mathbf{R}$ 具有"实线性".由线性空间的定义可知,复线性空间可视作实线性空间,将线性空间 X 与 Z 分别改记为 X_r 与 Z_r.由此,f_1 便成为实线性空间 X_r 的子空间 Z_r 上的线性泛函,且满足

$$f_1(x)\leqslant|f(x)|\leqslant p(x),x\in Z_r.$$

于是,由定理8.1.1,存在 X_r 上的线性泛函 $\tilde{f}_1$ 使得 $\tilde{f}_1$ 为 f_1 的延拓,且 $\tilde{f}_1(x)\leqslant p(x)(x\in X_r)$.定义

$$\tilde{f}(x)=\tilde{f}_1(x)-\mathrm{i}\tilde{f}_1(\mathrm{i}x),x\in X,$$

则由上述对于 f 的线性性的讨论可知,$\tilde{f}$ 必为 X 上的线性泛函.由

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) - i\tilde{f}_1(ix) = f_1(x) - if_1(ix) = f(x),\ x \in Z,$$

可知 $\tilde{f}$ 为 f 的延拓;又由 $\tilde{f}(x) = e^{i\theta}|\tilde{f}(x)|$ 可知,

$$|\tilde{f}(x)| = e^{-i\theta}\tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^{-i\theta}x), x \in X,$$

即 $\tilde{f}(e^{-i\theta}x)$ 恒为(非负)实数,因此

$$|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|\ p(x) = p(x), x \in X.$$

至此定理证毕.

推论 设 X 为实或复线性空间,p 为 X 上的半范数.若存在 $x_0 \in X$ 使得 $p(x_0) > 0$,则存在 X 上的非零线性泛函 $\tilde{f}$,满足

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

证 令

$$Z := \text{span}\{x_0\} = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbf{R}(\text{或}\ \mathbf{C})\},$$

定义

$$f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0), \alpha \in \mathbf{R}(\text{或}\ \mathbf{C}),$$

易知 f 为 Z 上的线性泛函,且

$$|f(\alpha x_0)| = |\alpha|\ p(x_0) = p(\alpha x_0), \quad \alpha \in \mathbf{R}(\text{或}\ \mathbf{C}).$$

于是由定理 8.1.1(或定理 8.1.2),存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$,满足

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x), \quad x \in X,$$

且当 $x = x_0 \in Z$ 时,

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = p(x_0) > 0,$$

即 $\tilde{f}$ 为非零线性泛函.证毕.

定理 8.1.3(赋范线性空间中的 H-B 延拓定理) 设 X 为赋范线性空间,Z 为 X 的子空间,f 为 Z 上的有界线性泛函.则存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$,使得

(1) $\tilde{f}(x) = f(x)(x \in Z)$;

(2) $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

证 令

$$p(x) = \|f\| \|x\| (x \in X),$$

则 p 显然是 X 上的半范数,且有

$$|f(x)| \leqslant p(x), x \in Z.$$

由定理 8.1.1(或定理 8.1.2),存在 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$,使得 $\tilde{f}$ 为 f 的延拓,且

$$|\tilde{f}(x)| \leqslant p(x) = \|f\| \|x\|, x \in X.$$

上式即说明 $\tilde{f}$ 有界,且 $\|\tilde{f}\| \leqslant \|f\|$. 另一方面,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\| &= \sup\{|\tilde{f}(x)| \mid x \in X \text{ 且 } \|x\| \leqslant 1\} \\ &\geqslant \sup\{|\tilde{f}(x)| \mid x \in Z \text{ 且 } \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \sup\{|f(x)| \mid x \in Z \text{ 且 } \|x\| \leqslant 1\} = \|f\|. \end{aligned}$$

因此 $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. 证毕.

定理 8.1.4(非零有界线性泛函的存在性) 设 X 为赋范线性空间,Z 为 X 的子空间,$x_0 \in X$. 若 $d(x_0, Z) > 0$,则存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$,使得

$$\|\tilde{f}\| = 1; \quad \tilde{f}(x_0) = d(x_0, Z); \tilde{f}(x) = 0 \quad (x \in Z).$$

证 令

$$Y := Z \dotplus \operatorname{span}\{x_0\} = \{z + \alpha x_0 \mid z \in Z, \alpha \in \mathbf{C}\},$$

定义

$$f(z + \alpha x_0) = \alpha d(x_0, Z), z \in Z, \alpha \in \mathbf{C},$$

则易知 f 为 Y 上的线性泛函,且满足

$$f(x_0) = d(x_0, Z); \quad f(z) = 0 \quad (z \in Z).$$

下证 $\|f\| = 1$. 事实上,对于任一 $z \in Z$,当 $\alpha \neq 0$ 时,有

$$|f(z + \alpha x_0)| = |\alpha| d(x_0, Z) \leqslant |\alpha| \left\| -\frac{z}{\alpha} - x_0 \right\| = \|z + \alpha x_0\|,$$

而当 $\alpha = 0$ 时,$|f(z)| = 0 \leqslant \|z\|$ 显然成立. 因此 f 有界,且 $\|f\| \leqslant 1$. 另一方面,由 $d(x_0, Z)$ 的定义可知,存在 Z 中的点列 (z_n) 使得 $\|z_n - x_0\| \to d(x_0, Z)$,于是

$$d(x_0, Z) = |f(z_n - x_0)| \leqslant \|f\| \|z_n - x_0\| \to \|f\| d(x_0, Z),$$

由于 $d(x_0, Z) > 0$,因此推得 $\|f\| \geqslant 1$. 从而证得 $\|f\| = 1$.

再运用定理 8.13 即得所证.

注 定理的结论也可写为

$$\|\tilde{f}\| = \frac{1}{d(x_0,Z)};\tilde{f}(x_0) = 1; \quad \tilde{f}(x) = 0 \quad (x \in Z).$$

推论 1 设 X 为赋范线性空间,$x_0 \in X$,$x_0 \neq 0$,则存在 X 上的有界线性泛函$\tilde{f}$,使得 $\|\tilde{f}\| = 1$,$\tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$.

推论 2 设 X 为赋范线性空间,$x,y \in X$,若对于 X 上的任一有界线性泛函 f 均有 $f(x) = f(y)$,则 $x = y$.

推论 3 设 X 为赋范线性空间,Z 为 X 的子空间,则 $x_0 \in Z^-$ 的充要条件是对于 X 上的任一满足 $\mathcal{N}(f) \supset Z$ 的有界线性泛函 f,均有 $f(x_0) = 0$.

推论 4 设 X 为赋范线性空间,$A \subset X$,则 $x_0 \in (\mathrm{span}A)^-$ 的充要条件是对于 X 上任一满足 $\mathcal{N}(f) \supset A$ 的有界线性泛函 f,均有 $f(x_0) = 0$.

推论 5 设 X 为赋范线性空间,则对于任一 $x \in X$,均有 $\|x\| = \sup\limits_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$.

作为 Hahn-Banach 定理的一个重要应用,我们给出如下定理.其中需用到 Riemann-Stieltjes 积分的有关知识(参见附录 §10.3).

定理 8.1.5(Riesz 表示定理) A 为 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函的充要条件是存在 $\alpha \in BV[a,b]$ 使得

$$A(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x), f \in C[a,b],$$

且还有 $\|A\| = \bigvee\limits_a^b(\alpha)$.

定理 8.1.5 的证明参见附录 §10.4.

§8.2 自反空间

设 X 为赋范线性空间.固定 $x \in X$,定义 X' 上的泛函 $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)(f) = f(x), f \in X',$$

则 $\varphi(x)$ 是 X' 上的有界线性泛函,记为 $\varphi(x) \in X''$.(此处的 $X'' := (X')'$,称为 X 的二次共轭空间.)

$\varphi(x)$ 的线性性是显然的,这是因为对于 $f,g \in X'$,$\alpha,\beta \in \mathbf{C}$,有

$$\begin{aligned}\varphi(x)(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &= \alpha\varphi(x)(f) + \beta\varphi(x)(g).\end{aligned}$$

同时,由定理 8.1.4 推论 5 知

$$\| \varphi(x) \| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | \varphi(x)(f) | = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | f(x) | = \| x \|,$$

即 $\varphi(x)$有界,且 $\| \varphi(x) \| = \| x \|$.

由于上述结果对任一 $x \in X$ 都成立,于是就定义了映射

$$\varphi: X \to X'',$$
$$x \mapsto \varphi(x),$$

通常称上述定义的 φ 为 X 到 X'' 中的自然(嵌入)映射(典则映射).

引理　赋范线性空间 X 到 X'' 中的自然映射 φ 是保范线性映射.

证　对于任意的 $x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$,由自然映射的定义,

$$\varphi(\alpha x + \beta y)(f) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
$$= \alpha\varphi(x)(f) + \beta\varphi(y)(f) = (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y))(f), f \in X',$$

因此,

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

即 φ 为线性映射;而在上述引进自然映射的过程中已得到

$$\| \varphi(x) \| = \| x \|, x \in X,$$

即 φ 是保范的.证毕.

注　引理说明:X 保范线性同构于 $\varphi(X) \subset X''$.注意到 X''完备,$\varphi(X)$为 X''的线性子空间,因此 $\varphi(X)^-$ 为 X''的完备子空间.从而 $\varphi(X)^-$ 给出了赋范线性空间 X 的完备化的一个具体构造.

定义 8.2.1　设 X 为赋范线性空间,若自然映射 $\varphi: X \to X''$为满射,即 $\varphi(X) = X''$,则称 X 是自反的(或反射的).

显然,自反的赋范线性空间必为 Banach 空间.

定理 8.2.1　有限维赋范线性空间是自反空间.

证　设 $\dim X = n$, $\varphi: X \to X''$为自然映射,则由引理可知,φ 是由 X 到 $\varphi(X)$上的保范线性同构映射.显然,$\dim\varphi(X) \leqslant \dim X$,而由线性代数的已知结果:同一数域 K 上的两个有限维线性空间(线性)同构的充要条件是它们具有相同的维数,则 $\dim\varphi(X) = \dim X = n$.又 X'线性同构于 K^n,$(K^n)'$线性同构于 K^n,则 X''线性同构于 K^n,于是 $\dim X'' = n$,从而 $\dim\varphi(X) = \dim X''$.注意到 $\varphi(X)$为 X''的线性子空间,因此 $\varphi(X) = X''$,即证得 X 是自反空间.

定理 8.2.2　$L^p(1 < p < +\infty)$是自反空间.

证　注意到

$$(L^p)' = L^q, (L^q)' = L^p \quad \left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

即分别存在保范线性同构映射 $f: L^q \to (L^p)'$ 与 $\tilde{f}: L^p \to (L^q)'$,分别记

$$f_y := f(y), y \in L^q; \quad \tilde{f}_x := \tilde{f}(x), x \in L^p,$$

则

$$f_y(x) = \int_X xy \mathrm{d}\mu, x \in L^p; \tilde{f}_x(y) = \int_X yx \mathrm{d}\mu, y \in L^q.$$

对于任一 $G \in (L^p)''$,定义 $g: L^q \to \mathbf{C}$,

$$g(y) = G(f_y), y \in L^q.$$

由于 $G(f_y) = (G \circ f)(y)$,则由 G 与 f 的线性性可知 g 为线性泛函,又因为

$$|g(y)| \leqslant \|G\| \|f_y\| = \|G\| \|y\|, y \in L^q,$$

可知 $g \in (L^q)'$. 于是存在 $x \in L^p$ 使得

$$g = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_x,$$

且有

$$\tilde{f}_x(y) = \int_X yx \mathrm{d}\mu = \int_X xy \mathrm{d}\mu = f_y(x), y \in L^q.$$

从而得到

$$G(f_y) = \tilde{f}_x(y) = f_y(x) = \varphi(x)(f_y), y \in L^q,$$

上式中的 $\varphi: L^p \to (L^p)''$ 为自然映射. 注意到 f 为双射,故当 y 取遍 L^q 时,f_y 取遍 $(L^p)'$,因此 $G = \varphi(x)$. 由 $G \in (L^p)''$ 的任意性即得自然映射 φ 为满射,此即说明 L^p 是自反空间. 证毕.

定理 8.2.3 Hilbert 空间必为自反空间.

定理 8.2.3 的证明留作练习.

§8.3 共轭算子

设 X, Y 为两个赋范线性空间,$T \in \mathscr{B}(X, Y)$. 对于任一 $g \in Y'$,令

$$f_g(x) = g(Tx), x \in X,$$

显然,f_g 为 X 上的线性泛函,又因为

$$|f_g(x)| \leqslant \|g\| \|Tx\| \leqslant \|g\| \|T\| \|x\|, x \in X,$$

所以 f_g 有界,即 $f_g \in X'$,且 $\|f_g\| \leqslant \|g\| \|T\|$. 若记 f_g 为 $T^{\times} g$,由此得一算子

$$T^{\times}: Y' \to X',$$

称 $T^{\times}$ 为 T 的共轭(或伴随)算子.

注　设 X 为数域 F 上的赋范线性空间,定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X \times X' \to F$,

$$\langle x, f\rangle := f(x), x \in X, f \in X',$$

易知,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是两个变元的连续函数,且关于第一、第二变元均具有线性性,还成立 $|\langle x, f\rangle| \leqslant \|x\| \|f\|$. 利用此运算符,我们有

$$g(Tx) = \langle Tx, g\rangle = \langle x, T^{\times} g\rangle = (T^{\times} g)x, x \in X, g \in Y'.$$

(试与 Hilbert 空间的共轭算子的形式及内积加以对照.)

定理 8.3.1　设 X, Y 为两个赋范线性空间,$T \in \mathscr{B}(X, Y)$,则 $T^{\times} \in \mathscr{B}(Y', X')$,且 $\|T^{\times}\| = \|T\|$.

证　对于任意的 $g_1, g_2 \in Y'$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$,有

$$\begin{aligned}\langle x, T^{\times}(\alpha g_1 + \beta g_2)\rangle &= \langle Tx, \alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha\langle Tx, g_1\rangle \\ &\quad + \beta\langle Tx, g_2\rangle = \alpha\langle x, T^{\times} g_2\rangle + \beta\langle x, T^{\times} g_2\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^{\times} g_1 + \beta T^{\times} g_2\rangle, x \in X,\end{aligned}$$

因此,

$$T^{\times}(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^{\times} g_1 + \beta T^{\times} g_2, g_1, g_2 \in Y', \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

此即说明 $T^{\times}$ 为线性算子.

注意到,在引进 $T^{\times}$ 的定义的过程中,我们已得到

$$\|T^{\times} g\| \leqslant \|T\| \|g\|, g \in Y',$$

因此 $T^{\times} \in \mathscr{B}(Y', X')$,且 $\|T^{\times}\| \leqslant \|T\|$.

另一方面,对于 $x \in X$,若 $Tx \neq 0$,则由定理 8.1.4 推论 1 知,存在 $g \in Y'$ 使得

$$\|g\| = 1, g(Tx) = \|Tx\|,$$

由此推得

$$\|Tx\| = (T^{\times} g)(x) \leqslant \|T^{\times} g\| \|x\| \leqslant \|T^{\times}\| \|x\|,$$

而当 $Tx=0$ 时,不等式 $\|Tx\|\leqslant\|T^{\times}\|\|x\|$ 显然成立,由此得 $\|T\|\leqslant\|T^{\times}\|$.

这就证明了 $\|T^{\times}\|=\|T\|$.

定理 8.3.2(星运算) 设 X,Y,Z 为赋范线性空间,$A,B\in\mathscr{B}(X,Y)$,$C\in\mathscr{B}(Y,Z)$,则

(1) $(A+B)^{\times}=A^{\times}+B^{\times}$;

(2) $(\alpha A)^{\times}=\alpha A^{\times},\alpha\in\mathbf{C}$;

(3) $(CA)^{\times}=A^{\times}C^{\times}$;

(4) 若 $A^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$,则$(A^{-1})^{\times}=(A^{\times})^{-1}$;

(5) 当 X,Y 分别自然嵌入X'',Y''时,则 $A^{\times\times}$ 是算子 A 在X''上的延拓,且 $\|A\|=\|A^{\times\times}\|$.

证 我们只证明(4)与(5),其余留作练习.

(4) 对于任一 $x\in X,f\in X'$,有

$$\langle x,(A^{\times}(A^{-1})^{\times})f\rangle=\langle x,A^{\times}((A^{-1})^{\times}f)\rangle=\langle Ax,(A^{-1})^{\times}f\rangle$$
$$=\langle A^{-1}(Ax),f\rangle=\langle(A^{-1}A)x,f\rangle=\langle x,f\rangle,$$

因此 $A^{\times}(A^{-1})^{\times}=I_{X'}$.

同理,对于任一 $y\in Y,g\in Y'$,可推得

$$\langle y,((A^{-1})^{\times}A^{\times})g\rangle=\langle y,g\rangle,$$

因此$(A^{-1})^{\times}A^{\times}=I_{Y'}$.

此即说明$(A^{\times})^{-1}$存在,且$(A^{\times})^{-1}=(A^{-1})^{\times}$.

(5) 设 $\varphi:X\to X'',\psi:Y\to Y''$均为自然映射,则对于任一 $f\in Y',x\in X$,有

$$\langle f,A^{\times\times}(\varphi(x))\rangle=\langle A^{\times}f,\varphi(x)\rangle=\langle x,A^{\times}f\rangle=\langle Ax,f\rangle=\langle f,\psi(Ax)\rangle,$$

由此即知,

$$A^{\times\times}(\varphi(x))=\psi(Ax),x\in X.$$

由于 X 与 Y 分别自然嵌入X''与 Y'',即可认为 $X\subset X'',Y\subset Y''$,且 $x=\varphi(x),Ax=\psi(Ax)$,因此可将上式视作

$$A^{\times\times}x=Ax,\quad x\in X,$$

亦即在此意义下,$A^{\times\times}$是 A 的延拓.此外,又由定理 8.3.1 即得

$$\|A^{\times\times}\|=\|A^{\times}\|=\|A\|.$$

注 $T^{\times}$与T^{*}的关系.

设X与Y为两个 Hilbert 空间,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$.注意到,Hilbert 空间当然是 Banach 空间,于是对于T,存在两个不同意义的共轭算子T^{*}与$T^{\times}$,其中

$$T^{*}\in\mathscr{B}(Y,X):(Tx,y)=(x,T^{*}y),x\in X,y\in Y;$$

$$T^{\times}\in\mathscr{B}(Y^{*},X^{*}):\langle Tx,g\rangle=\langle x,T^{\times}g\rangle,x\in X,g\in Y^{*}.$$

由§7.4,分别存在保范共轭线性同构映射$A:X\to X^{*}$与$B:Y\to Y^{*}$,则必有

$$T^{*}=A^{-1}T^{\times}B.$$

事实上,由 Riesz 表示定理,对于任意的$z\in X,y\in Y$,分别有

$$\langle x,Az\rangle=(x,z),x\in X,$$

$$\langle w,By\rangle=(w,y),w\in Y.$$

注意到,"$\langle x,Az\rangle=(x,z)$"等价于"$\langle x,z\rangle=(x,A^{-1}z)$",于是推得

$$\begin{aligned}(x,T^{*}y)&=(Tx,y)=\langle Tx,By\rangle=\langle x,T^{\times}(By)\rangle\\&=(x,A^{-1}(T^{\times}(By)))=(x,(A^{-1}T^{\times}B)y),x\in X,y\in Y.\end{aligned}$$

由于上式对于一切$x\in X$与$y\in Y$均成立,即得$T^{*}=A^{-1}T^{\times}B$.

需要指出的是,虽然T^{*}与$T^{\times}$是不同的两个算子,但由于历史的原因,在某些书籍或文章中往往将$T^{\times}$也记作T^{*},因此,如有必要,读者只能根据不同的场合自行加以区分.

§8.4 一致有界性定理(共鸣定理,Banach-Steinhaus)

定理 8.4.1 设X为 Banach 空间,Y为赋范线性空间,$T_{\lambda}\in\mathscr{B}(X,Y)$ $(\lambda\in\Lambda)$.若

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_{\lambda}x\|<+\infty,x\in X,$$

则

$$\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_{\lambda}\|<+\infty.$$

证 令

$$p(x)=\sup_{\lambda\in\Lambda}\|T_{\lambda}x\|,x\in X,$$

则p显然是X上的半范数.由于$T_{\lambda}\in\mathscr{B}(X,Y)$,因此由$T_{\lambda}$与范数的连续性

可知,

$$\{x \mid \|T_\lambda x\| \leqslant n, x \in X\} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

为 X 中的闭集,进而

$$E_n := \{x \mid p(x) \leqslant n, x \in X\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{x \mid \|T_\lambda x\| \leqslant n, x \in X\}$$

$$(n = 1,2,\cdots)$$

为 X 中的闭集.由于 $p(x) < +\infty (x \in X)$,因此 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$;又因为 X 完备,则由 Baire 纲定理知 X 为第二类型集,所以必存在 $N \in \mathbf{N}$ 使得 $(E_N)^\circ \neq \varnothing$.由此可知,存在 X 中的闭球 $S(x_0;r) \subset (E_N)^\circ$.注意到,在赋范线性空间中,

$$S(x_0;r) = \{x_0 + rx \mid x \in S(0;1)\},$$

则对于任一 $x \in S(0;1)$,有

$$p(x) = \frac{1}{r} p(rx) \leqslant \frac{1}{r}(p(x_0 + rx) + p(x_0)) \leqslant \frac{2N}{r},$$

于是可依次推得如下结论:

$$\|T_\lambda x\| \leqslant p(x) \leqslant \frac{2N}{r}, x \in S(0;1), \lambda \in \Lambda,$$

$$\Rightarrow \|T_\lambda\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|T_\lambda x\| \leqslant \frac{2N}{r}, \lambda \in \Lambda,$$

$$\Rightarrow \sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda\| \leqslant \frac{2N}{r} < +\infty.$$

定理证毕.

推论 设 X 为 Banach 空间,Y 为赋范线性空间,$T_n \in \mathscr{B}(X,Y)(n \in \mathbf{N})$.若对于任一 $x \in X$,$(T_n x)$为收敛点列,定义算子 $T: X \to Y$,

$$Tx = \lim_{n \to \infty} T_n x, x \in X,$$

则 $T \in \mathscr{B}(X,Y)$,且$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n\| < +\infty$,$\|T\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|T_n\|$.

推论的证明留作练习.

作为一致有界性定理在古典分析中的一个著名应用,我们给出下例.

例 对于任一 $x_0 \in \mathbf{R}$,均存在 $f \in C_{2\pi}$ 使得 f 的 Fourier 级数在 x_0 点发散.

证 由数学分析中的 Fourier 级数理论:若 $f \in C_{2\pi}$,则 f 的 Fourier 级数

为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

且有

$$S_n(f;x_0):=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u.$$

现在往证:对于任一 $x_0\in\mathbf{R}$,存在 $f\in C_{2\pi}$ 使得 $S_n(f;x_0)$ 不收敛. 现将 $S_n(f;x_0)$ 简记为 $S_n(f)$,且记

$$D_n(u):=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\pi\sin\frac{u}{2}}=\frac{1}{2\pi}(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos ku),$$

即往证存在 $f\in C_{2\pi}$ 使得

$$S_n(f)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+u)D_n(u)\mathrm{d}u$$

不收敛.

用泛函分析的观点,由

$$S_n(f):=\int_{\pi}^{\pi}f(x_0+u)D_n(u)\mathrm{d}u,f\in C_{2\pi},$$

显然确定了 $C_{2\pi}$ 上的线性泛函序列(S_n),且由§6.3例2可知

$$\|S_n\|=\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(u)|\mathrm{d}u<+\infty\quad(n=1,2,\cdots),$$

即(S_n)为 $C_{2\pi}$ 上的有界线性泛函序列.

注意到

$$\|S_n\|>\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)u}{u}\right|\mathrm{d}u=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t\to+\infty\quad(n\to\infty),$$

此即说明$\{\|S_n\|\}$为无界数列,于是由一致有界性定理即知,存在 $f\in C_{2\pi}$ 使得$\{S_n(f)\}$为无界数列,从而$\{S_n(f)\}$必不收敛.

§8.5 赋范线性空间中点、算子及泛函序列的收敛性

(1) 设 X 为赋范线性空间,(x_n)为 X 中点列.

(1.1) 若存在 $x\in X$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$,则称$(x_n)$强收敛于 x,记为

$$x_n\to x(n\to\infty)\text{ 或}\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

(1.2) 若存在 $x\in X$,对任一 $f\in X'$,有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$,则称$(x_n)$弱收敛于 x,记为

$$x_n\xrightarrow{w}x(n\to\infty)\text{ 或}(w)\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

(2) 设 X,Y 为两个赋范线性空间,(T_n)为 $\mathscr{B}(X,Y)$中序列.

(2.1) 若存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$,则称$(T_n)$一致(或以范数)收敛于 T,记为

$$T_n\to T(n\to\infty)\text{ 或}\lim_{n\to\infty}T_n=T.$$

(2.2) 若存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$使得$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=Tx(x\in X)$,则称$(T_n)$强收敛于 T,记为

$$T_n\xrightarrow{s}T(n\to\infty)\text{ 或 }(s)\lim_{n\to\infty}T_n=T.$$

(2.3) 若存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$使得对任一 $f\in Y'$均有$\lim\limits_{n\to\infty}f(T_nx)=f(Tx)$ $(x\in X)$,则称(T_n)弱收敛于 T,记为

$$T_n\xrightarrow{w}T(n\to\infty)\text{ 或 }(w)\lim_{n\to\infty}T_n=T.$$

(3) 设 X 为赋范线性空间,(f_n)为 X'中序列.

(3.1) 若存在 $f\in X'$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$,则称$(f_n)$强收敛于 f,记为

$$f_n\to f(n\to\infty)\text{ 或 }\lim_{n\to\infty}f_n=f.$$

(3.2) 若存在 $f\in X'$,对任一 $F\in X''$均有$\lim\limits_{n\to\infty}F(f_n)=F(f)$,则称$(f_n)$弱收敛于 f,记为

$$f_n\xrightarrow{w}f(n\to\infty)\text{ 或}(w)\lim_{n\to\infty}f_n=f.$$

(3.3) 若存在 $f\in X'$使得$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $(x\in X)$, 则称(f_n)弱*收敛于 f,记为

$$f_n \xrightarrow{w^*} f(n \to \infty) \text{或} (w^*) \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

定理 8.5.1　设(x_n)为赋范线性空间 X 中的点列.

(1) 若 $x_n \xrightarrow{w} x$, $x_n \xrightarrow{w} y$, 则 $x = y$.

(2) 若(x_n)弱收敛,则$(\| x_n \|)$有界.

(3) 若 $x_n \to x$, 则 $x_n \xrightarrow{w} x$.

(4) 若$\dim X < \infty$,则 $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

证　(1) 由赋范线性空间中点列弱收敛的定义,

$$x_n \xrightarrow{w} x := \forall f \in X' : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

$$x_n \xrightarrow{w} y := \forall f \in X' : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y),$$

以及数列极限的惟一性可知

$$\forall f \in X' : f(x) = f(y),$$

再由定理 8.1.4 推论 2 即得:$x = y$.

(2) 由条件知,对于任一 $f \in X'$,$(f(x_n))$均收敛,即$(\varphi(x_n)(f))$收敛(此处的 φ 为 X 到 X''的自然映射).注意到 X'恒为 Banach 空间,于是由一致有界性定理的推论可知,$(\| \varphi(x_n) \|)$有界,即$(\| x_n \|)$有界.

(3) 由不等式

$$| f(x_n) - f(x) | = | f(x_n - x) | \leqslant \| f \| \| x_n - x \|, \ f \in X',$$

即可证得.

(4) 由(3),只需证明:若 $\dim X < \infty$,则当 $x_n \xrightarrow{w} x$ 时必有 $x_n \to x$.

设$\dim X = m$,$\{e_1, \cdots, e_m\}$为 X 的基,记

$$x = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k, x_n = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(n)} e_k \quad (n = 1,2,\cdots).$$

定义 X 上的线性泛函f_j(由 X 为有限维可知f_j 必有界):

$$f_j(e_k) = \delta_{jk} \quad (k = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,m).$$

于是

$$f_j(x) = \xi_j, f_j(x_n) = \xi_j^{(n)} \quad (n = 1,2\cdots; j = 1,\cdots m).$$

由于 $x_n \xrightarrow{w} x$,因此 $f_j(x_n) \to f_j(x)$,即

$$\xi_j^{(n)} \to \xi_j \quad (j = 1, \cdots, m).$$

由此推得

$$\| x_n - x \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} | \xi_j^{(n)} - \xi_j | \| e_j \| \to 0,$$

即 $x_n \to x$.

注 由定理8.5.1(4)可知,若将 X 上的有界泛函序列视作 $\mathscr{B}(X,\mathbf{C})$中的有界算子序列,则其强收敛与弱收敛等价,均为有界泛函序列的弱* 收敛.

定理 8.5.2 设 X,Y 为两个赋范线性空间,(T_n)为 $\mathscr{B}(X,Y)$中的序列.

(1) 若 $T_n \xrightarrow{w} T, T_n \xrightarrow{w} S$,则 $T=S$.

(2) 若 $T_n \to T$,则 $T_n \xrightarrow{S} T$;若 $T_n \xrightarrow{S} T$,则 $T_n \xrightarrow{w} T$.

(3) 若(T_n)弱收敛,X 完备,则$(\| T_n \|)$有界.

证明留作练习.

定理 8.5.3 设 X 为赋范线性空间,(f_n)为 X'中的序列.

(1) 若 $f_n \xrightarrow{w^*} f, f_n \xrightarrow{w^*} g$,则 $f=g$.

(2) 若 $f_n \to f$,则 $f_n \xrightarrow{w} f$;若 $f_n \xrightarrow{w} f$,则 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(3) 若 X 自反,则 $f_n \xrightarrow{w} f \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f$.

(4) 若(f_n)弱* 收敛,X 完备,则$(\| f_n \|)$有界.

证明留作练习.

定理 8.5.4 设 X,Y 为两个 Banach 空间,(T_n)为 $\mathscr{B}(X,Y)$中序列.则(T_n)强收敛的充要条件是

(1) $(\| T_n \|)$有界;

(2) 对于任一 $x \in D$,$(T_n x)$均为 Cauchy 点列,其中 $D:(\text{span}D)^- = X$.

证 必要性.由定理8.5.2(2)(3)即得本定理的条件(1);由于赋范线性空间中的强收敛点列必为 Cauchy 点列,因此条件(2)显然成立.

充分性.由条件(1),存在常数 $c>0$ 使得 $\| T_n \| < c \,(n=1,2,\cdots)$.由于$(\text{span}D)^- = X$,因此,任意给定 $\varepsilon>0$,对于任一 $x \in X$,存在 $y \in \text{span}D$,使得

$$\| x - y \| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

由条件(2)以及 span$D$ 的定义与 T_n 的线性性易知,$(T_n y)$也是 Y 中的 Cauchy 点列,于是存在 $N \in \mathbf{N}$,当 $n,m > N$ 时,恒有

$$\| T_n y - T_m y \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此推得

$$\begin{aligned}\| T_n x - T_m x \| &\leqslant \| T_n x - T_n y \| + \| T_n y - T_m y \| + \| T_m y - T_m x \| \\ &\leqslant \| T_n \| \| x - y \| + \| T_n y - T_m y \| \\ &\quad + \| T_m \| \| x - y \| < \varepsilon.\end{aligned}$$

因为 Y 完备，所以对于任一 $x \in X$，$(T_n x)$在 Y 中均为强收敛；又由于 X 完备，则由一致有界性定理之推论可知，存在 $T \in \mathscr{B}(X, Y)$使得

$$\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx, x \in X,$$

此即有界线性算子序列(T_n)强收敛之定义.

定理证毕.

推论 1　设 X 为 Banach 空间，(f_n)为 X'中序列. 则(f_n)弱*收敛的充要条件是

(1) $(\| f_n \|)$有界；

(2) 对于任一 $x \in D$，$(f_n(x))$均为 Cauchy 数列，其中 $D:(\mathrm{span} D)^- = X$.

证　由定义，X'中的泛函序列(f_n)的弱*收敛即为 $\mathscr{B}(X, \mathbf{C})$中的算子序列$(f_n)$的强收敛，由此即得推论 1.

推论 2　设 X 为赋范线性空间，(x_n)为 X 中点列. 则 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 的充要条件是

(1) $(\| x_n \|)$有界；

(2) 对于任一 $f \in D$，均有 $f(x_n) \to f(x_0)$，其中 $D:(\mathrm{span} D)^- = X'$.

证明留作练习(提示：作自然映射 $\varphi: X \to X''$).

例 (机械求积的收敛性问题)　注意到，给定

$$\Delta_n := a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{m_n}^{(n)} = b,$$

$$c_n := (c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \cdots, c_{m_n}^{(n)}) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

由下式

$$\Phi_n(f) := \sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), f \in C[a, b] \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

便确定了 $C[a,b]$ 上的一列有界线性泛函(Φ_n)，且有

$$\|\Phi_n\| = \sum_{k=0}^{m_n} |c_k^{(n)}| \quad (n=1,2,\cdots)$$

(参见习题 6.24)，上述定义的(Φ_n)称为机械求积公式．于是，由定理 8.5.4 推论 1 即得如下结论：

机械求积公式(Φ_n)对于任一 $f\in C[a,b]$均有

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

的充要条件是

(1) 存在常数 $M>0$ 使得

$$\sum_{k=0}^{m_n} |c_k^{(n)}| \leqslant M \quad (n=1,2,\cdots);$$

(2) 对于 $p(x)=x^j\ (j=0,1,2,\cdots)$均有

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(p) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$

特别地，若 $c_k^{(n)}\geqslant 0\quad (k=0,1,\cdots,m_n;n=1,2,\cdots)$，则上述条件(2)蕴含了条件(1)．

事实上，

$$\sum_{k=0}^{m_n} |c_k^{(n)}| = \sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)} = \Phi_n(1)\to\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a,$$

于是存在 $M>0$ 使得(1)成立．

注　在实际构造时，通常选取机械求积公式中的 $c_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,m_n)$满足：对于任一次数不高于 $n(n\leqslant m_n)$的 $p(x)=x^j$，均有

$$\Phi_n(p) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$

于是 $c_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,m_n)$可通过求解下述方程组得到：

$$\sum_{k=0}^{m_n} c_k^{(n)}(x_k^{(n)})^j = \frac{b^{j+1}-a^{j+1}}{j+1} \quad (j=0,1,\cdots,n).$$

§8.6　开映射定理、逆算子定理

为了使得在证明下述引理时的思路清晰、行文简洁，首先引入如下运算记

号,且给出若干有关的性质.

设 X 为赋范线性空间,$A,B\subset X$.记

$$\alpha A+\beta B:=\{\alpha x+\beta y\mid x\in A,y\in B\},\alpha,\beta\in\mathbf{C}.$$

特别地,若 $A=\{x_0\}$,则记

$$x_0+B:=\{x_0+y\mid y\in B\}.$$

易知,有以下结论:

1° $B(x_0;r)=x_0+B(0;r)$;

2° $B(0;\alpha r)=\alpha B(0;r)(\alpha>0)$;

3° $B(0;r)\pm B(0;r)=B(0;2r)$;

4° $B(x_0;r)-B(x_0;r)=B(0;2r)$;

5° $\alpha A^-=(\alpha A)^-(\alpha\in\mathbf{C})$;

6° $A^-\pm B^-\subset(A\pm B)^-$;

7° 若 $A_1\subset A_2,B_1\subset B_2$,则 $A_1\pm B_1\subset A_2\pm B_2,\alpha A_1\subset\alpha A_2$;

8° 若 X,Y 为线性空间,$T:X\to Y$ 为线性算子,则 $T(\alpha A+\beta B)=\alpha T(A)+\beta T(B)$.

在本节引理及定理的叙述与论证中,为了明确区分起见,特别记 X 中的开球为$B(x_0;r)$,Y 中开球记为$B^*(y_0;r)$.

引理 设 X,Y 为两个 Banach 空间,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$,且 $T(X)=Y$.则存在 $\delta>0$,使得

$$B^*(0;\delta)\subset T(B(0;1)).$$

证 我们分两步证明:

(1) 存在 $\delta>0$,使得 $B^*(0;\delta)\subset\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)\right)^-$,从而

$$B^*\left(0;\frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\subset\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2^n}\right)\right)\right)^-\ (n=1,2,\cdots);$$

(2) $B^*(0;\delta)\subset T(B(0;1))$,即:对于任一 $y\in B^*(0;\delta)$,存在 $x\in B(0;1)$,使得 $y=Tx$.

(1) 因为 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}B(0;n)$,所以

$$Y=T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(B(0;n)).$$

由于 Y 为 Banach 空间,则由 Baire 纲定理知 Y 为第二类型集,即存在 $k\in\mathbf{N}$,使得$(T(B(0;k))^-)^\circ\neq\varnothing$,因此存在 $y_0\in Y$ 与 $r>0$,使得

$$B^*(y_0;r)\subset(T(B(0;k)))^-.$$

注意到

$$\begin{aligned}B^*(0;2r)&=B^*(y_0;r)-B^*(y_0;r)\\&\subset(T(B(0;k)))^- -(T(B(0;k)))^-\\&\subset(T(B(0;k))-T(B(0;k)))^-\\&=(T(B(0;k)-B(0;k)))^-=(T(B(0;2k)))^-\\&=4k\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)\right)^-,\end{aligned}$$

从而 $B^*\left(0;\frac{r}{2k}\right)\subset\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)\right)^-$. 记 $\delta=\frac{r}{2k}$,即证得(1).

(2) 对于任一 $y\in B^*(0;\delta)$,由 $B^*(0;\delta)\subset\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2}\right)\right)\right)^-$ 知,存在 $x_1\in B\left(0;\frac{1}{2}\right)$使得

$$\|y-Tx_1\|<\frac{\delta}{2},$$

即

$$(y-Tx_1)\in B^*\left(0;\frac{\delta}{2}\right);$$

又由 $B^*\left(0;\frac{\delta}{2}\right)\subset\left(T\left(B\left(0;\frac{1}{2^2}\right)\right)\right)^-$ 知,存在 $x_2\in B\left(0;\frac{1}{2^2}\right)$使得

$$\|y-(Tx_1+Tx_2)\|=\|(y-Tx_1)-Tx_2\|<\frac{\delta}{2^2};$$

如此以往,一般地,存在 $x_j\in B\left(0;\frac{1}{2^j}\right)$ $(j=1,2,\cdots)$使得

$$\|y-\sum_{j=1}^{n}Tx_j\|=\|y-T(\sum_{j=1}^{n}x_j)\|<\frac{\delta}{2^n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

注意到 X 完备,由

$$\|\sum_{j=n+1}^{n+p}x_j\|\leqslant\sum_{j=n+1}^{n+p}\|x_j\|<\sum_{j=n+1}^{n+p}\frac{1}{2^j}\quad(n,p=1,2,\cdots),$$

即知$(\sum_{j=1}^{n}x_j)$为 X 中的收敛点列,于是存在 $x\in X$ 使得$x=\sum_{j=1}^{\infty}x_j$,且由

$$\| x \| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \| x_j \| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1,$$

即得 $x \in B(0;1)$. 再由范数与 T 的连续性,推得

$$\| y - Tx \| = \lim_{n \to \infty} \| y - T(\sum_{j=1}^{n} x_j) \| = 0,$$

即 $y = Tx$.

至此引理证毕.

定理 8.6.1(开映射定理) 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, 且 $T(X) = Y$. 则 T 是开映射,即 T 将 X 中的任一开集映为 Y 中开集.

证 设 V 为 X 中的开集,对于任一 $y \in T(V)$,必存在 $x \in V$ 使得 $y = Tx$. 由于 V 为开集,因此存在 $r > 0$ 使得 $B(x;r) \subset V$. 由引理,存在 $\delta > 0$ 使得

$$B^*(0;r\delta) = rB^*(0;\delta) \subset rT(B(0;1)) = T(B(0;r)).$$

由此推得

$$\begin{aligned} B^*(y;r\delta) &= y + B^*(0;r\delta) \subset Tx + T(B(0;r)) \\ &= T(x + B(0;r)) = T(B(x;r)) \subset T(V), \end{aligned}$$

此即说明 $T(V)$ 为 Y 中开集,亦即证得 T 为开映射.

定理 8.6.2(逆算子定理) 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, 且 T 为 X 到 Y 上的双射,则 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$.

证 由于 $T: X \to Y$ 为双射,因此 T 存在逆算子 $T^{-1}: Y \to X$, 且由 T 为线性算子易知 T^{-1} 也必为线性算子. 又由开映射定理,对于 X 中的任一开集 V, $T(V)$ 为 Y 中开集. 注意到 $T(V) = (T^{-1})^{-1}(V)$, 即 $T(V)$ 作为 X 中的开集 V 关于映射 T^{-1} 的原像是 Y 中的开集,此即说明 $T^{-1}: Y \to X$ 为连续映射. 由于赋范线性空间上的线性算子的有界性与连续性等价,由此证得 $T^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$.

推论 1 设 X, Y 为两个 Banach 空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, 且 T 为 X 到 Y 上的双射,则存在正数 a, b 使得

$$a \| x \| \leqslant \| Tx \| \leqslant b \| x \|, x \in X.$$

推论 2 设 $\| \cdot \|_1$ 和 $\| \cdot \|_2$ 是线性空间 X 上的两个 Banach 范数(即 $(X, \| \cdot \|_1)$ 和 $(X, \| \cdot \|_2)$ 均为 Banach 空间). 若存在 $b > 0$ 使得

$$\| x \|_2 \leqslant b \| x \|_1, x \in X,$$

则存在 $a>0$ 使得

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2, x \in X.$$

§8.7 闭图像定理

设 X,Y 为两个赋范线性空间,在乘积空间 $X\times Y$ 中引进通常的线性运算,且定义范数

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|, (x,y) \in X \times Y,$$

则 $X\times Y$ 成为一赋范线性空间.

易知,$X\times Y$ 为 Banach 空间的充要条件是 X 和 Y 都是 Banach 空间.

定义 8.7.1 设 D 为 X 的子空间,$T:D\to Y$ 为线性算子.称

$$\mathscr{G}(T) := \{(x,Tx) \mid x \in D\}$$

为 T 的图像.若 $\mathscr{G}(T)$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间,则称 $T:D\to Y$ 为闭线性算子,简称 T 为闭算子.

注 由定义易知,$\mathscr{G}(T)$ 恒为 $X\times Y$ 的子空间.

定理 8.7.1(闭图像定理) 设 X,Y 为两个 Banach 空间,D 为 X 的子空间,$T:D\to Y$ 为闭算子.若 D 为 X 的闭子空间,则 T 有界.

证 注意到,X,Y 是 Banach 空间,则 $X\times Y$ 是 Banach 空间,由 $T:D\to Y$ 为闭算子的定义,$\mathscr{G}(T)$ 是 $X\times Y$ 的闭子空间,因此 $\mathscr{G}(T)$ 是 Banach 空间;同时,D 作为 Banach 空间 X 的闭子空间也是 Banach 空间.定义 $P:\mathscr{G}(T)\to D$,

$$P(x,Tx) = x, \quad (x,Tx) \in \mathscr{G}(T),$$

则 P 显然为线性算子,且由

$$\|P(x,Tx)\| = \|x\| \leqslant \|x\| + \|Tx\| = \|(x,Tx)\|,$$

可知 P 有界,即 $P\in\mathscr{B}(\mathscr{G}(T),D)$.又,显然 $P(\mathscr{G}(T))=D$,且

$$P(x,Tx) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow (x,Tx) = (0,0),$$

可知 P 为单射,从而 P 为双射.于是由逆算子定理,$P^{-1}\in\mathscr{B}(D,\mathscr{G}(T))$.由此推得

$$\|Tx\| \leqslant \|(x,Tx)\| = \|P^{-1}x\| \leqslant \|P^{-1}\|\|x\|, x \in D,$$

即证得 T 有界.

定理 8.7.2　设 X,Y 为两个赋范线性空间，D 为 X 的子空间，$T:D\to Y$ 为线性算子. 则 T 为闭算子的充要条件是对于 D 中的任一点列，若 $x_n\to x$ 且 $Tx_n\to y$，则 $x\in D$ 且 $y=Tx$.

证　必要性. 设 $x_n\in D\quad(n=1,2,\cdots)$，且

$$x_n\to x\in X,Tx_n\to y\in Y,$$

则 $(x_n,Tx_n)\in\mathscr{G}(T)\quad(n=1,2,\cdots)$，且

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)\in X\times Y.$$

由于 T 为闭算子，即 $\mathscr{G}(T)$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间，因此 $(x,y)\in\mathscr{G}(T)$，即 $x\in D$ 且 $y=Tx$.

充分性. 设 $(x_n,Tx_n)\in\mathscr{G}(T)\quad(n=1,2,\cdots)$，且

$$(x_n,Tx_n)\to(x,y)\in X\times Y,$$

则 $x_n\in D(n=1,2,\cdots)$，且

$$x_n\to x\in X,Tx_n\to y\in Y.$$

由条件 $x\in D$ 且 $y=Tx$，即

$$(x,y)=(x,Tx)\in\mathscr{G}(T),$$

此即说明 $\mathscr{G}(T)$ 为 $X\times Y$ 中的闭集，而由定义 $\mathscr{G}(T)$ 恒为 $X\times Y$ 的子空间，从而 $\mathscr{G}(T)$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间，亦即证明了 T 为闭算子.

定理 8.7.3　设 X,Y 是两个赋范线性空间，D 是 X 的子空间，$T\in\mathscr{B}(D,Y)$.

(1) 若 D 为 X 的闭子空间，则 T 为闭算子. 特别地，若 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，则 T 为闭算子.

(2) 若 T 为闭算子且 Y 为 Banach 空间，则 D 为 X 的闭子空间.

证明留作练习.

§8.8　全连续算子

定义 8.8.1　设 X,Y 为两个赋范线性空间，$T:X\to Y$ 为线性算子. 若 T 将 X 中的任一有界集映为 Y 中的列紧集，则称 $T:X\to Y$ 为全连续算子，记为 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

引理　设 X,Y 为赋长线性空间.

(1)　若 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$，则 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，且 $T(X)$ 可分.

(2) $T\in\mathscr{C}(X,Y)$的充要条件是 $T(B(0;1))$为列紧集.

(3) $T\in\mathscr{C}(X,Y)$的充要条件是对于 X 中的任一有界点列(x_n)必存在子列(x_{n_k})使得(Tx_{n_k})在 Y 中强收敛.

证 (1)因为列紧集为完全有界集,而完全有界集为有界集,由此即得,全连续算子 T 将X 中的任一有界集映为Y 中的有界集,即 T 为有界线性算子.又由于完全有界集是可分集,因此对于任一 $n\in\mathbf{N}$, $T(B(0;n))$均为 Y 中的可分集,由此即知 $T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(B(0;n))$为 Y 中的可分集.

(2) 只需证充分性.设 E 为X 中有界集,则存在 $r>0$ 使得 $rE\subset B(0;1)$,由此推得

$$T(E)=\frac{1}{r}T(rE)\subset\frac{1}{r}T(B(0;1)).$$

注意到,$T(B(0;1))$为 Y 中的列紧集,则$\frac{1}{r}T(B(0;1))$也必为 Y 中的列紧集,于是作为其子集的 $T(E)$必为 Y 中的列紧集.此即说明 T 为全连续算子.

(3) 必要性显然成立.下证充分性.设 E 为X 中有界集,(y_n)为$T(E)$中任一点列,则存在 $x_n\in E$ 使得$y_n=Tx_n(n=1,2,\cdots)$,由此得到 X 中的有界点列(x_n).由条件,存在子列(x_{n_k})使得(Tx_{n_k})在 Y 中强收敛,即存在(y_n)的子列(y_{n_k})在 Y 中强收敛,此即说明 $T(E)$为 Y 中的列紧集,亦即证得 T 为全连续算子.

定理 8.8.1 设 X,Y,Z 为赋范线性空间,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$,$S\in\mathscr{B}(Y,Z)$.

(1) 若$\dim T(X)<\infty$(即 T 为有限秩算子),则 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

(2) 若$\dim X<\infty$(此时只需假定 T 为线性算子),则 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

(3) 若 T,S 中至少有一个为全连续算子,则 $ST\in\mathscr{C}(X,Z)$.

证 (1) 因为 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$,即 T 将X 中的任一有界集E 映为Y 的子空间 $T(X)$中的有界集 $T(E)$,由于 $\dim T(X)<\infty$,因而 $T(X)$是局部紧的,即得 $T(E)$为 $T(X)$中的列紧集,$T(E)$当然也是 Y 中的列紧集,此即说明 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

(2) 由于 $\dim X<\infty$,因此由 X 到 Y 的线性算子必有界.注意到 $\dim T(X)\leqslant\dim X$,于是由(1)即知 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$.

(3) 由于全连续算子必为有界线性算子,因此不妨设 T 与S 中一个为全连续算子而另一个为有界线性算子.设 E 为 X 中的任一有界集,若 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$,$S\in\mathscr{B}(Y,Z)$,则 $T(E)$为 Y 中的列紧集,于是$(ST)(E)=$

$S(T(E))$为 Z 中的列紧集；若 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$，$S\in\mathscr{C}(Y,Z)$，则 $T(E)$为 Y 中的有界集，于是$(ST)(E)=S(T(E))$仍然为 Z 中的列紧集. 无论哪种假定，均推得 $ST\in\mathscr{C}(X,Z)$.

定理 8.8.2　设 X 为赋范线性空间，Y 为 Banach 空间. 则由 X 到 Y 的全体全连续算子所成的算子族 $\mathscr{C}(X,Y)$(按算子的线性运算及算子范数)是 $\mathscr{B}(X,Y)$的闭子空间，从而为 Banach 空间.

证　由引理(3)与(1)易知，$\mathscr{C}(X,Y)$为 $\mathscr{B}(X,Y)$的赋范线性子空间. 下证 $\mathscr{C}(X,Y)$为 $\mathscr{B}(X,Y)$中的闭集，即往证：若 $\tilde{T}\in(\mathscr{C}(X,Y))^-$，则 $\tilde{T}\in\mathscr{C}(X,Y)$.

由假定，则对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$，使得 $\|\tilde{T}-T\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由于 $T(B(0;1))$必为 Y 中的完全有界集，于是存在 $y_k\in Y(k=1,\cdots n)$，使得

$$T(B(0;1))\subset\bigcup_{k=1}^{n}B\left(y_k;\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

即对于任一 $x\in B(0;1)$，存在 $y_k\in Y$，使得 $\|Tx-y_k\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此推得

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}x-y_k\|&\leqslant\|\tilde{T}x-Tx\|+\|Tx-y_k\|\\&\leqslant\|\tilde{T}-T\|\,\|x\|+\|Tx-y_k\|<\varepsilon,\end{aligned}$$

此即说明 $\tilde{T}(B(0;1))\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}B(y_k;\varepsilon)$，即 $\tilde{T}(B(0;1))$为 Y 中的完全有界集，注意到 Y 完备，则 $\tilde{T}(B(0;1))$即为 Y 中的列紧集. 再利用引理(2)即证得 $\tilde{T}\in\mathscr{C}(X,Y)$.

推论　在定理的假设条件下，有：全连续算子序列的一致收敛的极限算子是全连续算子；特别地，有限秩算子序列的一致收敛的极限算子是全连续算子.

定理 8.8.3　设 X,Y 为两个赋范线性空间. 若 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$，则 $T^\times\in\mathscr{C}(Y',X')$.

证　我们首先将以下证明的总体思路作一交待. 为了得到 $T^\times\in\mathscr{C}(Y',X')$，由定义，对于 Y'中的任一有界集 $\mathscr{G}$，我们往证 $T^\times(\mathscr{G})$为 X'中的列紧集，而此等价于证明：对于 $\mathscr{G}$ 中的任一点列(g_n)，必存在子列(g_{n_k})使得$(T^\times g_{n_k})$在 X'中收敛. 在论证过程中将利用Arzela-Ascoli定理，为此需做一些准备工作.

由于 $\mathscr{G}$ 为 Y'中的有界集，则存在 $\alpha>0$ 使得

$$\|g\|\leqslant\alpha,g\in\mathscr{G}.$$

由 $T\in\mathscr{C}(X,Y)$可知,$E:=(T(S(0;1)))$ 为 Y 中的紧集.现将 E 视为紧度量空间,将 $\mathscr{G}$ 中的元素 g(视作连续映射)在 E 上的限制记为 g_E,记

$$\mathscr{G}_E:=\{g_E\mid g\in\mathscr{G}\},$$

则 $\mathscr{G}_E\subset C(E)$,此时

$$\|g_E\|=\sup_{y\in E}|g_E(y)|=\sup_{y\in E}|g(y)|,g_E\in\mathscr{G}_E.$$

以下验证 $\mathscr{G}_E$ 满足 Arzela-Ascoli 定理的充分性条件:

(i) 由 E 为 Y 中紧集可知 E 必为 Y 中有界集,即存在 $\beta>0$ 使得 $\sup\limits_{y\in E}\|y\|\leqslant\beta$,于是,对于任一 $g_E\in\mathscr{G}_E$,有

$$\|g_E\|=\sup_{y\in E}|g(y)|\leqslant\|g\|\sup_{y\in E}\|y\|\leqslant\alpha\beta<+\infty,$$

即 $\mathscr{G}_E$ 为$C(E)$中的有界集;

(ii) 对于任一 $g_E\in\mathscr{G}_E$ 以及任意的$y',y''\in E$,有

$$|g_E(y')-g_E(y'')|=|g(y')-g(y'')|=|g(y'-y'')|$$
$$\leqslant\|g\|\|y'-y''\|\leqslant\alpha\|y'-y''\|,$$

由此即知 $\mathscr{G}_E$ 在E上等度连续.

引用 Arzela-Ascoli 定理,即知 $\mathscr{G}_E$ 为$C(E)$中的列紧集.因此,对于 $\mathscr{G}$ 中的任一点列(g_n),相应得到的 $\mathscr{G}_E$ 中的点列$((g_n)_E)$必有子列$((g_{n_k})_E)$为 $C(E)$ 中收敛点列,从而为 $C(E)$中的 Cauchy 点列.注意到,$T^\times\in\mathscr{B}(Y',X')$,且

$$\|T^\times g_{n_i}-T^\times g_{n_j}\|=\sup_{\|x\|\leqslant1}|(T^\times g_{n_i}-T^\times g_{n_j})x|$$
$$=\sup_{\|x\|\leqslant1}|g_{n_i}(Tx)-g_{n_j}(Tx)|\leqslant\sup_{y\in E}|g_{n_i}(y)-g_{n_j}(y)|$$
$$=\sup_{y\in E}|((g_{n_i})_E-(g_{n_j})_E)(y)|=\|(g_{n_i})_E-(g_{n_j})_E\|,$$

由此可知$(T^\times g_{n_k})$为 Banach 空间 X'中的 Cauchy 点列,从而为 X'中的收敛点列.

回到证明起始所述,定理证毕.

习　题

1. 设 p 为线性空间X 上的半范数,证明:$p(0)=0$,且 $p(x)\geqslant0\quad(x\in X)$.
2. 设 p 为线性空间X 上的半范数,f 为X 上的线性泛函,证明:

$$f(x)\leqslant p(x)(x\in X)\Leftrightarrow|f(x)|\leqslant p(x)\quad(x\in X).$$

3. 设 X 为赋范线性空间，$x_0\in X$ 且 $x_0\neq 0$，证明：存在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$，使得 $\|\tilde{f}\|=1,\tilde{f}(x_0)=\|x_0\|$.

4. 设 X 为赋范线性空间，$x,y\in X$，证明：若对于任一 $f\in X'$ 均有 $f(x)=f(y)$，则 $x=y$.

5. 设 X 为赋范线性空间，Z 为 X 的子空间，$x_0\in X$，证明：$x_0\in \bar{Z}$ 的充要条件是对于 X 上的任一满足 $\mathcal{N}(f)\supset Z$ 的有界线性泛函 f，均有 $f(x_0)=0$.

6. 设 X 为赋范线性空间，$A\subset X$，$x_0\in X$，证明：$x_0\in\overline{(\mathrm{span}A)}$ 的充要条件是对于 X 上任一满足 $\mathcal{N}(f)\supset A$ 的有界线性泛函 f，均有 $f(x_0)=0$.

7. 设 X 为赋范线性空间，证明：对于任一 $x\in X$，均有 $\|x\|=\sup\limits_{\|f\|\leqslant 1}|f(x)|$.

8. 设 G 为赋范线性空间 X 的闭子空间，如果对于任一 $f\in X'$，若 $f(G)=\{0\}$ 则 $f=0$，证明 $G=X$.

9. 证明：无限维赋范线性空间的共轭空间也是无限维的.

10. 设 X 为赋范线性空间，证明：若 X' 可分，则 X 也可分.

11. 证明：l^1 空间不是自反空间.

12. 设 X 为 Banach 空间，证明：X 自反的充要条件是 X' 自反.

13. 证明：Hilbert 空间必为自反空间.

14. 设 X 为数域 F 上的赋范线性空间，定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle:X\times X'\to F$，

$$\langle x,f\rangle:=f(x),x\in X,f\in X',$$

证明：(1) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是两个变元的连续函数；

(2) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 关于第一、第二元素均具有线性性；

(3) $|\langle x,f\rangle|\leqslant\|x\|\,\|f\|$.

15. 设 X,Y,Z 为赋范线性空间，$A,B\in\mathscr{B}(X,Y)$，$C\in\mathscr{B}(Y,Z)$. 证明：

(1) $(A+B)^{\times}=A^{\times}+B^{\times}$；

(2) $(\alpha A)^{\times}=\alpha A^{\times},\alpha\in\mathbf{C}$；

(3) $(CA)^{\times}=A^{\times}C^{\times}$.

16. 试求零算子与恒等算子的共轭算子.

17. 设 X,Y 为 Hilbert 空间，证明：

$$\langle x,T^{\times}g\rangle=(x,T^{*}y_0),$$

其中 $g(y)=(y,y_0)(y\in Y)$.

18. 设 $T:l^p\to l^p$ 为右移算子，即

$$Tx=y=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p,$$

试求 $T^{\times}$.

19. 设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范线性空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)(n\in\mathbf{N})$，且对于任一 $x\in X$，(T_nx) 为收敛点列，定义算子 $T:X\to Y$

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx,x\in X.$$

证明：$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，且$\sup_{n\in\mathbf{N}}\|T_n\|<+\infty$，$\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

20. 设 X 为赋范线性空间，$E\subset X$，且对于任一 $f\in X'$，均有$\sup_{x\in E}|f(x)|<+\infty$，证明：$E$ 为有界集.

21. 设 $y=(\eta_n)$为一复数列，证明：若对于任一 $x=(\xi_n)\in\mathscr{C}_0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\bar{\eta}_n$ 均收敛，则 $y\in l^1$.

22. 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的 $\mathscr{L}$ 可测函数，$p\geqslant 1$，且对于任一 $g\in L^p(\mathbf{R};m)$均有 $f\cdot g\in L(\mathbf{R};m)$，证明：$f\in L^q(\mathbf{R};m)$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

23. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，(T_n)为 $\mathscr{B}(X,Y)$中的序列. 证明：

(1) 若 $T_n\xrightarrow{w}T$，$T_n\xrightarrow{w}S$，则 $T=S$；

(2) 若 $T_n\to T$，则 $T_n\xrightarrow{S}T$；若 $T_n\xrightarrow{S}T$，则 $T_n\xrightarrow{w}T$；

(3) 若(T_n)弱收敛，X 完备，则$(\|T_n\|)$有界.

24. 设 X 为赋范线性空间，(f_n)为 X'中的序列. 证明：

(1) 若 $f_n\xrightarrow{w^*}f$，$f_n\xrightarrow{w^*}g$，则 $f=g$；

(2) 若 $f_n\to f$，则 $f_n\xrightarrow{w}f$；若 $f_n\xrightarrow{w}f$，则 $f_n\xrightarrow{w^*}f$；

(3) 若 X 自反，则 $f_n\xrightarrow{w}f\Leftrightarrow f_n\xrightarrow{w^*}f$；

(4) 若(f_n)弱*收敛，X 完备，则$(\|f_n\|)$有界.

25. 设(e_n)为 Hilbert 空间 H 中的就范直交序列，证明：(e_n)弱收敛但不强收敛.

26. 设 $T_n:l^2\to l^2$ 为左移算子，即

$$T_nx=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots),x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：$T_n\in\mathscr{B}(l^2,l^2)$，$(T_n)$强收敛但不一致收敛.

27. 设 $T_n:l^2\to l^2$ 为右移算子，即

$$T_nx=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{个}},\xi_1,\xi_2,\cdots),x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：$T_n\in\mathscr{B}(l^2,l^2)$，$(T_n)$弱收敛但不强收敛.

28. 设 $f_n\in(\mathscr{C}_0)'$定义为

$$f_n(x)=\xi_n,x=(\xi_k)\in\mathscr{C}_0\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：(f_n)弱*收敛但不弱收敛.

29. 设 $f_n\in(\mathscr{C}_{00})'$定义为

$$f_n(x)=n\xi_n,x=(\xi_k)\in\mathscr{C}_{00}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明：(f_n)弱*收敛但$(\|f_n\|)$无界.（此题同时说明了一致有界性定理中空间 X 的完备性的条件不能去掉.）

30. 设 X 为赋范线性空间，(x_n)为 X 中点列. 则 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 的充要条件是

(1) $(\|x_n\|)$有界；

(2) 对于任一 $f\in D$，均有 $f(x_n)\to f(x_0)$，其中 $D:(\operatorname{span}D)^- = X'$.

31. 设 X 为可分 Banach 空间，证明：X'中的任一有界点列均存在弱*收敛子列.

32. 设 X 为赋范线性空间，M 为 X 的闭子空间，证明：若 M 中的点列(x_n)弱收敛于 x_0，则 $x_0\in M$.

33. 设 $p\in(1,+\infty)$，$x,x_n\in l^p(n=1,2,\cdots)$，记 $x=(\xi_k)$，$x_n=(\xi_k^{(n)})(n=1,2,\cdots)$，证明：$(x_n)$弱收敛于 x 的充要条件为$(\|x_n\|)$有界且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k(k=1,2,\cdots)$.

34. 举例说明：开映射不必将闭集映为闭集.

35. 将 c_{00} 视作赋范线性空间 l^∞ 的子空间，定义算子 $T:c_{00}\to c_{00}$

$$Tx = \left(\frac{\xi_n}{n}\right), x = (\xi_n) \in c_{00},$$

试说明对于 T 逆算子定理的结论不成立.

36. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，证明：T^{-1}存在且有界的充要条件是 T 为满射且存在 $m>0$ 使得

$$\|Tx\| \geqslant m\|x\|, x\in X.$$

37. 设 X 为 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$且$\|T\|<1$，证明：$(I-T)$存在有界逆算子.

38. 设 X 为 Banach 空间，$T,T^{-1},S\in\mathscr{B}(X,X)$，且 $\|S\|<\dfrac{1}{\|T^{-1}\|}$，证明：$(T+S)$存在有界逆算子.

39. 设 X,Y 为两个 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，且 T 为 X 到 Y 上的双射，证明：存在正数 a,b 使得

$$a\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant b\|x\|, x\in X.$$

40. 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间 X 上的两个 Banach 范数. 证明：若存在 $b>0$ 使得

$$\|x\|_2 \leqslant b\|x\|_1, x\in X,$$

则存在 $a>0$ 使得

$$a\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2, x\in X.$$

41. 在 $C[a,b]$上同时考虑两个范数.

$$\|f\|_c = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|, \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx, f\in C[a,b],$$

试问：上述的两个范数是否等价？为什么？

42. 设 X,Y 是两个赋范线性空间，D 是 X 的子空间，$T\in\mathscr{B}(D,Y)$. 证明：

(1) 若 D 为 X 的闭子空间，则 T 为闭算子；

(2) 若 T 为闭算子且 Y 为 Banach 空间，则 D 为 X 的闭子空间.

43. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，$T:X\to Y$ 为闭算子，$S\in\mathscr{B}(X,Y)$，证明：$T+S$ 为闭算子.

44. 设 H 为 Hilbert 空间，$A,B:H\to H$ 为线性算子，且满足

$$(Ax,y)=(x,By),x,y\in H,$$

证明：$A\in\mathscr{B}(H,H)$.

45. 试用闭图像定理证明逆算子定理.

46. 对于 $x=(\xi_n)\in l^p$，定义算子 $T:Tx=\left(\frac{\xi_n}{n}\right)$，证明 $T\in\mathscr{C}(l^p,l^p)$.

47. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$ 且存在 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$. 证明：若 $\dim X=\infty$，则 $T\notin\mathscr{C}(X,Y)$.

48. 设 X,Y 为两个赋范线性空间，$T\in\mathscr{C}(X,Y)$. 证明：若 $x_n\xrightarrow{w}x$，则 $Tx_n\to Tx$.

49. 设 X,Y 为两个 Banach 空间，$T\in\mathscr{C}(X,Y)$. 证明：若 $T(X)$ 为 Y 的闭子空间，则 $\dim T(X)<\infty$.

第九章* Banach 代数和全连续算子的谱

§9.1 Banach 代数

定义 9.1.1 设 A 为数域 K 上的线性空间.若 A 又是一个环,使得

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),\ x, y \in X,\ \alpha \in K,$$

则称 A 是一个代数.若 A 为赋范线性空间,范数满足关系

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\ \|y\|,$$

且存在 $e \in X$ 满足

$$xe = ex = x,\ \|e\| = 1,$$

则称 A 是一个赋范代数(或称赋范环).完备的赋范代数称为 Banach 代数.

例 设 X 为 Banach 空间,则 $\mathscr{B}(X, X)$ 是一个 Banach 代数.

以下一律假定 A 为 Banach 代数.

引理 1 对于任一 $x \in A$,极限

$$\rho(x) := \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

均存在,且 $\rho(x) \leqslant \|x\|$.又

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} \text{收敛,若 } \rho(x) < 1, \\ \text{发散,若 } \rho(x) > 1 \end{cases}$$

(其中规定 $x^0 = e$.)

证 任意取定 $k \in \mathbf{N}$,对任一 $n \in \mathbf{N}$,均有

$$n = mk + l \quad (m \in \{0, 1, 2, \cdots\}, l \in \{0, 1, \cdots, k-1\}),$$

于是

$$\lim_{n \to \infty} \frac{l}{n} = 0, \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{k}.$$

注意到

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|x^{mk}\|^{\frac{1}{n}} \|x^l\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|x^k\|^{\frac{m}{n}} \|x\|^{\frac{l}{n}},$$

则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|x^k\|^{\frac{1}{k}} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

由此得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\|x^k\|^{\frac{1}{k}},$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ 存在,而由

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (\|x\|^n)^{\frac{1}{n}} = \|x\|,$$

即知 $\rho(x)\leqslant\|x\|$.

又,若 $\rho(x)<1$,则由正项级数的 Cauchy 判别法知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|x^n\|$ 收敛,且由

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x^k\right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\|x^k\|,$$

可知 $\left(\sum\limits_{k=0}^{n}x^k\right)$ 为 Banach 代数 A 中的 Cauchy 列,从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 收敛;若 $\rho(x)>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x^n\| = +\infty$,从而即知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 发散.

注 记 G 为 A 中有逆元的元素 x 的全体所成之集,x 的逆元记为 x^{-1},则

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e.$$

引理 2 若 $\rho(x)<1$,则 $e-x\in G$,且

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

证 注意到

$$(e-x^{n+1}) = (e-x)(e+x+\cdots+x^n) = (e+x+\cdots+x^n)(e-x),$$

又由 $\rho(x)<1$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$,于是对上式令 $n\to\infty$ 即得

$$e = (e-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)(e-x),$$

此即说明 $(e-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$.

定理 9.1.1 对于任一 $x\in G$,若 $\|h\|<\|x^{-1}\|^{-1}$,则 $(x+h)\in G$,且

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| = O(\|h\|^2).$$

因此 G 是 A 中的开集，且 $x \mapsto x^{-1}$ 为连续映射.

证 注意到，对于任一 $x\in G, h\in A$，有

$$x+h=x(e+x^{-1}h);$$

由条件，当 $\|h\|<\|x^{-1}\|^{-1}$ 时，

$$\|-x^{-1}h\|\leqslant\|x^{-1}\|\|h\|<1,$$

则由引理 1 得

$$\rho(-x^{-1}h)\leqslant\|-x^{-1}h\|<1,$$

进而由引理 2 知 $(e+x^{-1}h)\in G$，加之条件 $x\in G$，从而 $x+h=x(e+x^{-1}h)\in G$. 且由

$$\|(x+h)^{-1}-x^{-1}+x^{-1}hx^{-1}\|\leqslant\|(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h\|\|x^{-1}\|$$

$$=\left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-x^{-1}h)^n\right\|\|x^{-1}\|\leqslant\|h\|^2\|x^{-1}\|^3\sum_{n=0}^{\infty}\|x^{-1}h\|^n=\frac{\|x^{-1}\|^3}{1-\|x^{-1}h\|}\|h\|^2,$$

易知存在 $M>0$，当 $\|h\|$ 充分小时，成立

$$\frac{\|x^{-1}\|^3}{1-\|x^{-1}h\|}\|h\|^2\leqslant M\|h\|^2,$$

由此即得所证.

定义 9.1.2 设 A 为 Banach 代数，$x\in A$，集合

$$\sigma(x):=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\lambda e-x\notin G\}$$

称为 x 的谱.

定理 9.1.2 对于任一 $x\in A$，$\sigma(x)$ 均为紧集，且

$$\sigma(x)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|\leqslant\rho(x)\}.$$

证 对于任一 $\lambda\in\sigma(x)$，则由定义，$\lambda e-x\notin G$. 若 $\lambda\neq0$，则 $e-\frac{x}{\lambda}\notin G$，而由引理 2，$\rho\left(\frac{x}{\lambda}\right)\geqslant1$，于是 $\rho(x)\geqslant|\lambda|$；若 $\lambda=0$，则 $\rho(x)\geqslant0$ 恒成立. 由此证得

$$\sigma(x)\subset\{\lambda\in\mathbf{C}\mid|\lambda|\leqslant\rho(x)\},$$

且可知 $\sigma(x)$ 为 $\mathbf{C}$ 中的有界集. 于是只需证明 $\sigma(x)$ 为 $\mathbf{C}$ 中的闭集，即证得 $\sigma(x)$ 为紧集. 为此，往证 $\sigma(x)^c$ 为 $\mathbf{C}$ 中开集.

设 $\lambda_0\in\sigma(x)^c$，则由定义，$\lambda_0e-x\in G$，而由定理 9.1.1 知 G 为开集，于

是存在 $r>0$，当 $\lambda\in B(\lambda_0,r)$ 时，$\lambda e-x\in G$，即 $\lambda\in\sigma(x)^c$，此即说明 $\lambda_0\in(\sigma(x)^c)^\circ$，由此证得 $\sigma(x)^c$ 为开集.

引理 3 对于任一 $x\in A$，$\Phi\in A'$，定义

$$f(\lambda)=\Phi((\lambda e-x)^{-1}),\lambda\in\sigma(x)^c,$$

则 f 为 $\sigma(x)^c$ 上的解析函数.

证 由于 $\lambda\in\sigma(x)^c$，即 $\lambda e-x\in G$，则由定理 9.1.1，对于 $h\in\mathbf{C}$，当 $|h|<\|(\lambda e-x)^{-1}\|^{-1}$ 时，$(\lambda e-x+he)\in G$，且

$$\|((\lambda+h)e-x)^{-1}-(\lambda e-x)^{-1}+(\lambda e-x)^{-1}he(\lambda e-x)^{-1}\|=O(|h|^2),$$

于是

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{((\lambda+h)e-x)^{-1}-(\lambda e-x)^{-1}\}=-(\lambda e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1},$$

从而

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(\lambda+h)-f(\lambda)\}=-\Phi((\lambda e-x)^{-1}(\lambda e-x)^{-1}),$$

且显然有

$$\lim_{\lambda\to\infty}f(\lambda)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\Phi\left(\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right)=0\cdot\Phi(e)=0.$$

定理 9.1.3 对于任一 $x\in A$，均有 $\sigma(x)\neq\varnothing$.

证 用反证法. 若存在 $x\in A$ 使得 $\sigma(x)=\varnothing$，则由引理 3，对于任一 $\Phi\in A'$，相应的 f 在 $\mathbf{C}$ 上解析，且注意到 $f(\infty)=0$，于是 $f=0$，由此得

$$\Phi(x^{-1})=f(0)=0,\ \Phi\in A',$$

从而必有 $x^{-1}=0$，矛盾.

定理 9.1.4 若对任一 $x\neq0$，均有 $x\in G$，则

$$A=\{\lambda e\mid\lambda\in\mathbf{C}\}.$$

证 由定理 9.1.3，对于任一 $x\in A$ 必有 $\sigma(x)\neq\varnothing$，即存在 $\lambda\in\mathbf{C}$ 使得 $\lambda e-x\notin G$，由条件即知 $\lambda e-x=0$，亦即 $x=\lambda e$.

定理 9.1.5 $\rho(x)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(x)\}$.（因此 $\rho(x)$ 称为 x 的谱半径.）

证 令

$$r(x)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(x)\},$$

则由定理 9.1.2 知 $r(x)\leqslant\rho(x)$.

另一方面，对于任一 $\lambda\in\mathbf{C}$，若 $|\lambda|>\rho(x)$，则 $\rho\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)<1$，于是由引理 2，

$$\left(e-\frac{x}{\lambda}\right)^{-1}=e+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{n},$$

$$(\lambda e-x)^{-1}=\frac{e}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{\lambda^{n+1}},$$

于是

$$f(\lambda)=\Phi(e)\frac{1}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(x^{n})\frac{1}{\lambda^{n+1}},\ |\lambda|>\rho(x),\ \Phi\in A',$$

注意到 f 在 $\sigma(x)^{c}$ 上解析，因此上式在 $|\lambda|>r(x)$ 时成立. 由此即知

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\left|\frac{\Phi(x^{n})}{\lambda^{n+1}}\right|<+\infty,\ |\lambda|>r(x),\ \Phi\in A'.$$

进而由习题 8.20 可知，

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\left\|\frac{x^{n}}{\lambda^{n+1}}\right\|<+\infty,\ |\lambda|>r(x),$$

于是存在 $M_{\lambda}>0$ 使得

$$\|x^{n}\|\leqslant M_{\lambda}\ |\lambda|^{n+1},\ n\in\mathbf{N},\ |\lambda|>r(x),$$

$$\|x^{n}\|^{\frac{1}{n}}\leqslant M_{\lambda}^{\frac{1}{n}}\ |\lambda|^{1+\frac{1}{n}},\ n\in\mathbf{N},\ |\lambda|>r(x),$$

令 $n\to\infty$，可知当 $|\lambda|>r(x)$ 时，均有

$$\rho(x)\leqslant|\lambda|,$$

即得 $\rho(x)\leqslant r(x)$.

§9.2　全连续算子方程

设 X 为赋范线性空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 考虑算子方程

$$Tx-\lambda x=y, \tag{1}$$

$$Tx-\lambda x=0, \tag{2}$$

$$T^{\times}f-\lambda f=g, \tag{$1^{\times}$}$$

$$T^{\times}f-\lambda f=0. \tag{$2^{\times}$}$$

定义 9.2.1 集合

$$\sigma(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid T-\lambda I \text{ 在 } \mathscr{B}(X,X) \text{ 中无逆}\}$$

称为 T 的谱.

注 显然,若 $\lambda\notin\sigma(T)$,则

1° $T-\lambda I$ 为满射,即 $\mathscr{R}(T-\lambda I)=X$,亦即方程(1)对一切 $y\in X$ 有解.

2° $T-\lambda I$ 为单射,即方程(2)只有零解,亦即 $\mathscr{N}(T-\lambda I)=\{0\}$.

如果 X 为 Banach 空间,则 1°和 2°也是 $\lambda\notin\sigma(T)$ 的充分条件.因此,$\lambda\in\sigma(T)$ 的充要条件是 1°和 2°至少有一个不成立.

定义 9.2.2 集合

$$\sigma_p(T):=\{\lambda\in\mathbf{C}\mid\mathscr{N}(T-\lambda I)\neq\{0\}\}\subset\sigma(T)$$

称为 T 的点谱,$\lambda\in\sigma_p(T)$ 称为 T 的特征值,方程(2)的相应非零解 x 称为 T 的特征向量.

定理 9.2.1 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 T 的相异特征值,$x_1,\ldots,x_n$ 为相应的特征向量,则 $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关.

证 用反证法.若 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\alpha_k x_k$,则一方面

$$(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_{n-1}I)x_n=\Big(\sum_{k=1}^{n-1}(\lambda_n-\lambda_k)\Big)x_n\neq 0,$$

另一方面

$$(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_{n-1}I)\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k x_k=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_{n-1})x_k=0,$$

由此得到矛盾.

定理 9.2.2 若

$$Tx-\lambda x=0,\ T^{\times}f-\mu f=0,\ \lambda\neq\mu,$$

则 $f(x)=0$.

证 事实上,

$$\begin{aligned}0&=\langle 0,f\rangle=\langle(T-\lambda I)x,f\rangle=\langle x,(T^{\times}-\lambda I)f\rangle\\&=\langle x,(T^{\times}-\mu I)f+(\mu-\lambda)If\rangle\\&=\langle x,(\mu-\lambda)f\rangle=(\mu-\lambda)\langle x,f\rangle,\end{aligned}$$

即得所证.

引理 1 设 $T\in\mathscr{C}(X,X)$,$\lambda\neq 0$.

(i) 对于任一 $y\in\mathscr{R}(T-\lambda I)$，令

$$E(y):=\{x\in X\mid Tx-\lambda x=y\},$$

则存在 $x(y)\in E(y)$使得

$$\|x(y)\|=\inf\{\|x\|\mid x\in E(y)\},$$

且存在 $M>0$ 使得

$$\|x(y)\|\leqslant M\|y\|,\ y\in\mathscr{R}(T-\lambda I).$$

(ii) $\mathscr{R}(T-\lambda I)$是 X 的闭子空间.

证 (i)令

$$m=\inf\{\|x\|\mid x\in E(y)\},$$

则存在 $x_n\in E(y)(n=1,2,\cdots)$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=m,$$

$$Tx_n-\lambda x_n=y\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是由(x_n)有界以及 $T\in\mathscr{C}(X,X)$可知

$$(x_n)=\left(\frac{1}{\lambda}(Tx_n-y)\right)$$

有收敛子列(x_{n_k})，记 $x_{n_k}\to x(y)$，即得 $\|x(y)\|=m$，且

$$Tx(y)-\lambda x(y)=y,$$

即 $x(y)\in E(y)$.

以下用反证法证明引理所述 M 的存在性. 如若不然，则存在 $y_n\in\mathscr{R}(T-\lambda I)$使得

$$\|x(y_n)\|>n\|y_n\|\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是

$$\frac{y_n}{\|x(y_n)\|}\to 0.$$

注意到

$$T\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|}-\lambda\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|}=\frac{y_n}{\|x(y_n)\|},$$

因此再次由 $T\in\mathscr{C}(X,X)$可知

$$\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|}=\frac{1}{\lambda}\left(T\frac{x(y_n)}{\|x(y_n)\|}-\frac{y_n}{\|x(y_n)\|}\right)$$

有收敛子列$\left\{\frac{x(y_{n_k})}{\|x(y_{n_k})\|}\right\}$,记$\frac{x(y_{n_k})}{\|x(y_{n_k})\|}\to y_0$,则有

$$Ty_0-\lambda y_0=0,$$

进而有

$$(T-\lambda I)(x(y_{n_k})-\|x(y_{n_k})\|y_0)=y_{n_k},$$

即$(x(y_{n_k})-\|x(y_{n_k})\|y_0)\in E(y_{n_k})$. 于是由 $x(y_{n_k})$的定义,

$$\|x(y_{n_k})-\|x(y_{n_k})\|y_0\|\geqslant\|x(y_{n_k})\|,$$

即

$$\left\|\frac{x(y_{n_k})}{\|x(y_{n_k})\|}-y_0\right\|\geqslant 1,$$

这与$\frac{x(y_{n_k})}{\|x(y_{n_k})\|}\to y_0$ 矛盾.

(ii) 设 $y_n\in\mathscr{R}(T-\lambda I)$, $y_n\to y_0$,则由(i),相应地有 $x(y_n)\in E(y_n)$,且

$$\|x(y_n)\|\leqslant M\|y_n\|\leqslant L<+\infty\quad(n=1,2,\cdots),$$

于是由 $T\in\mathscr{C}(X,X)$可知

$$x(y_n)=\frac{1}{\lambda}(Tx(y_n)-y_n)$$

有收敛子列$(x(y_{n_k}))$,记 $x(y_{n_k})\to x_0$,则有

$$Tx_0-\lambda x_0=y_0,$$

即 $y_0\in\mathscr{R}(T-\lambda I)$,此即说明$\mathscr{R}(T-\lambda I)$是闭子空间.

定理 9.2.3 设 $T\in\mathscr{C}(X,X)$, $\lambda\neq 0$.

(i) 方程(1)有解的充要条件是对于($2^\times$)的一切解 f,有 $f(y)=0$.

(ii) 方程($1^\times$)有解的充要条件是对于(2)的一切解 x,有 $g(x)=0$.

证 (i)事实上,

方程(1)无解$\Leftrightarrow y\notin\mathscr{R}(T-\lambda I)$

$\Leftrightarrow$ 存在 $f\in X'$ 使得 $f(y)\neq 0$ 且 $f(x)=0\quad(x\in\mathscr{R}(T-\lambda I))$

$\Leftrightarrow$ 存在 $f\in X'$ 使得 $f(y)\neq 0$ 且 $\langle(T-\lambda I)x,f\rangle=0\quad(x\in X)$

$\Leftrightarrow$ 存在 $f\in X'$ 使得 $f(y)\neq 0$ 且 $\langle x,(T^{\times}-\lambda I)f\rangle=0\quad(x\in X)$

$\Leftrightarrow$ 存在 $f\in X'$ 使得 $f(y)\neq 0$ 且 $(T^{\times}-\lambda I)f=0$.

(ii) 必要性. 设 $(1^{\times})$ 有解 f, x 为(2)的任一解, 则

$$\langle x,g\rangle=\langle x,(T^{\times}-\lambda I)f\rangle=\langle Tx-\lambda x,f\rangle=\langle 0,f\rangle=0.$$

充分性. 设 $g\in X'$ 使得对于方程(2)的任一解 x 均有 $g(x)=0$. 注意到, 若

$$(T-\lambda I)x_1=(T-\lambda I)x_2,$$

则

$$(T-\lambda I)(x_1-x_2)=0,$$

于是

$$g(x_1)=g(x_2),$$

由此可知, 我们可在 $\mathscr{R}(T-\lambda I)$ 上定义泛函 f: 若 $(T-\lambda I)x=y$, 则定义 $f(y)=g(x)$. 显然, f 为线性泛函, 且

$$|f(y)|=|g(x)|=|g(x(y))|\leqslant\|g\|\,\|x(y)\|\leqslant\|g\|M\|y\|,$$
$$y\in\mathscr{R}(T-\lambda I),$$

即 $f\in(\mathscr{R}(T-\lambda I))'$. 利用 H-B 延拓定理可将 f 保范延拓至 X', 仍记作 f, 于是

$$\langle x,(T^{\times}-\lambda I)f\rangle=\langle(T-\lambda I)x,f\rangle=\langle x,g\rangle,\ x\in X,$$

由此即得

$$T^{\times}f-\lambda f=g.$$

定理 9.2.4　设 $T\in\mathscr{C}(X,X)$, $\lambda\neq 0$.

(i) 方程(1)对一切 $y\in X$ 有解的充要条件是(2)只有零解. 这时 $\lambda\notin\sigma(T)$.

(ii) 方程 $(1^{\times})$ 对一切 $g\in X'$ 有解的充要条件是 $(2^{\times})$ 只有零解. 这时 $\lambda\notin\sigma(T^{\times})$.

证　首先注意到, 由定理 8.8.3 知, 若 $T\in\mathscr{C}(X,X)$, 则 $T^{\times}\in\mathscr{C}(X',X')$,

于是我们只需证明(i).

必要性. 用反证法. 若方程(1)对一切 $y\in X$ 有解,且方程(2)有非零解 x_1,则方程(1)对于 $y=x_1$ 有解 x_2,对于 $y=x_2$ 有解 x_3,……,如此以往,得到点列(x_n)使得

$$0\neq x_1=(T-\lambda I)x_2=(T-\lambda I)^2x_3=\cdots=(T-\lambda I)^k x_{k+1}=\cdots,$$

$$0=(T-\lambda I)x_1=(T-\lambda I)^2x_2=\cdots=(T-\lambda I)^k x_k=\cdots,$$

其中$(T-\lambda I)^k:=\underbrace{(T-\lambda I)\cdots(T-\lambda I)}_{k次}$. 记

$$\mathcal{N}_k:=\mathcal{N}((T-\lambda I)^k)\quad(k=1,2,\cdots),$$

则每一 $\mathcal{N}_k$ 均为 X 的闭子空间. 显然,

$$\mathcal{N}_1\subset\mathcal{N}_2\subset\mathcal{N}_3\subset\cdots,$$

且由上述的讨论可知 $\mathcal{N}_k\neq\mathcal{N}_{k+1}(k=1,2,\cdots)$. 于是由§6.2 的 Riesz 引理可知,存在 $y_{k+1}\in\mathcal{N}_{k+1}$使得

$$\|y_{k+1}\|=1,d(y_{k+1},\mathcal{N}_k)>\frac{1}{2}\quad(k=1,2,\cdots).$$

任取 $m>n>1$,则由

$$(T-\lambda I)y_m\in\mathcal{N}_{m-1},$$

$$(T-\lambda I)y_n\in\mathcal{N}_{n-1}\subset\mathcal{N}_{m-1},$$

$$y_n\in\mathcal{N}_n\subset\mathcal{N}_{m-1},$$

可知

$$\left(\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)y_n-\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)y_m+y_n\right)\in\mathcal{N}_{m-1},$$

于是

$$\|Ty_m-Ty_n\|=\left\|\lambda\left\{y_m-\left[\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)y_n-\frac{1}{\lambda}(T-\lambda I)y_m+y_n\right]\right\}\right\|>\frac{|\lambda|}{2},$$

从而(Ty_n)无收敛子列. 但注意到$\|y_n\|=1(n=2,3,\cdots)$,即(y_n)为有界点列,且 $T\in\mathscr{C}(X,X)$,由此得到矛盾.

充分性. 设方程(2)只有零解,则由定理 9.2.3 可知,此时方程$(1^\times)$对于任一 $g\in X'$均有解. 又由上述已证之结论可知,此时方程$(2^\times)$只能有零解. 再次由定理 9.2.3 即知,此时方程(1)对于任一 $y\in X$ 均有解.

以下说明,此时必有 $\lambda \notin \sigma(T)$.

设方程(1)对于任一 $y\in X$ 均有解(亦即 $\mathscr{R}(T-\lambda I)=X$),则已证得方程(2)只有零解(亦即 $\mathscr{N}(T-\lambda I)=\{0\}$),由此,一方面说明 $(T-\lambda I)$ 为双射,于是存在逆(线性)算子 $(T-\lambda I)^{-1}: X\to X$;另一方面说明方程(1)对于每一个 y 的解 x_y 是惟一的,于是 x_y 即为引理 1(i)中的 $x(y)$,从而有

$$\|(T-\lambda I)^{-1}y\| = \|x_y\| = \|x(y)\| \leqslant M\|y\|, y \in X,$$

即得 $(T-\lambda I)^{-1}\in \mathscr{B}(X,X)$,此即说明 $\lambda \notin \sigma(T)$.

§9.3 全连续算子的谱

定理 9.3.1 若 $T\in \mathscr{C}(X,X)$, $\lambda\neq 0$,则

$$\sigma_p(T)\setminus\{0\} = \sigma(T)\setminus\{0\} = \sigma(T^\times)\setminus\{0\}.$$

证 若 $0\neq\lambda\notin\sigma_p(T)$,则由定义即方程

$$Tx - \lambda x = 0$$

只有零解.由定理 9.2.4 知 $\lambda\notin\sigma(T)$,即得

$$\sigma(T)\setminus\{0\} \subset \sigma_p(T)\setminus\{0\},$$

而相反的包含关系恒成立,由此即知上式成为等式.

又设 $\lambda\neq 0$,则由定义以及定理 9.2.3 即知,

$$\begin{aligned}\lambda \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow \text{方程 } Tx - \lambda x = 0 \text{ 只有零解}\\ &\Leftrightarrow \text{对于任一 } g \in X',\text{方程 } T^\times f - \lambda f = g \text{ 均有解}\\ &\Leftrightarrow \lambda \notin \sigma(T^\times),\end{aligned}$$

此即说明 $\sigma(T)\setminus\{0\}=\sigma(T^\times)\setminus\{0\}$.

定理 9.3.2 若 $\dim X=\infty$, $T\in\mathscr{C}(X,X)$,则 $0\in\sigma(T)$.

证 若 $0\notin\sigma(T)$,则由定义知 $T^{-1}\in\mathscr{B}(X,X)$,于是 $I=TT^{-1}$ 为全连续算子,由此即知 X 为局部紧的,此与条件 $\dim X=\infty$ 矛盾.

定理 9.3.3 若 $T\in\mathscr{C}(X,X)$,则 $\sigma(T)$ 至多只有一个聚点 0.

证 若 $\sigma(T)$ 有非零聚点 λ,则由定义,存在 $\sigma(T)$ 中的数列 (λ_n) 使得

$$\lambda_n \to \lambda,\ \lambda_n \neq 0,\ \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i\neq j),$$

易知,如此的 (λ_n) 也必为 $\sigma_p(T)$ 中数列,于是存在 $x_n\in X$ 使得

$$0 \neq x_n \in \mathcal{N}(T - \lambda_n I) \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由定理 9.2.1,$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$线性无关.记

$$M_n := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

则每一 M_n 当然为 X 的闭子空间,且有

$$M_n \subset M_{n+1}, M_n \neq M_{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

以下运用类似于定理 9.2.4 必要性中的论证方法,即可由 Riesz 引理导出矛盾,不再赘述.

第十章　附　　录

§10.1　R 中非 Lebesgue 可测集的存在性

我们有如下结论:若 $E\subset\mathbf{R}$ 且 $m^*(E)>0$,则存在 $F\subset E$ 使得 $F\notin\mathcal{L}$.

我们利用 Lebesgue(外)测度的平移不变性来具体构造上述 F.

由 $m^*(E)>0$ 可知,存在 $a\in(0,+\infty)$使得

$$m^*(E\cap[-a,a])>0,$$

不妨设 $m^*(E\cap[0,a])>0$,现将 $E\cap[0,a]$仍记作 E.

令

$$E(x):=\{\xi\mid\xi\in E\text{ 且 }x-\xi\in\mathbf{Q}\},x\in E.$$

则 $x\in E(x)$,且当 $E(x)\neq E(y)$时,必有 $E(x)\cap E(y)=\varnothing$.用反证法,若 $E(x)\cap E(y)\neq\varnothing$,则存在 $z\in E(x)\cap E(y)$以及 $r_x,r_y\in\mathbf{Q}$,使得

$$z=x-r_x,\ z=y-r_y.$$

又,对于任一 $\eta\in E(y)$,存在 $r_\eta\in\mathbf{Q}$,使得 $\eta=y-r_\eta$,于是有

$$\eta=(x-r_x+r_y)-r_\eta=x-(r_x-r_y+r_\eta)\in E(x),$$

此即说明 $E(y)\subset E(x)$,且由对称性即知 $E(x)\subset E(y)$,从而 $E(x)=E(y)$.

由此,将 E 分解为如上所述的一族两两不交的集合之并,且对其中的每一集合中取且只取一代表元组成一集合 F,以下说明此 F 即为非 Lebesgue 可测集.

首先,由 F 的构造可知对于任一$x\in E$,$E(x)\cap F$ 必为单点集,记为$\{\xi\}$,于是 $\xi\in E$ 且$x-\xi\in\mathbf{Q}\cap[-a,a]$.若记$\{r_n\}=\mathbf{Q}\cap[-a,a]$,则存在 $k\in\mathbf{N}$,使得

$$x=\xi+r_k\in(r_k+F),$$

由此即得

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n+F)\subset[-a,2a].$$

其次,若 $n\neq m$,则必有 $(r_n+F)\cap(r_m+F)=\varnothing$. 如若不然,则存在 ζ 使得

$$\zeta-r_n\in F,\ \zeta-r_m\in F.$$

注意到,由 $(\zeta-r_n)-(\zeta-r_m)=r_m-r_n\in\mathbf{Q}$,可知 $\zeta-r_n$ 及 $\zeta-r_m$ 同属于上述 E 的分解中的某一集合 $E(x)$;又由 $n\neq m$ 可知 $\zeta-r_n\neq\zeta-r_m$,这与 $E(x)\cap F$ 为单点集矛盾.

于是,由 Lebesgue 测度的平移不变性可知,若 $F\in\mathscr{Y}$,则 $(r_n+F)\in\mathscr{Y}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(r_n+F)\in\mathscr{Y}$,且 $m(r_n+F)=m(F)$,由外测度的单调性与测度的可列可加性,

$$0<m^*(E)\leqslant m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n+F)\right)\leqslant m^*([-a,2a])=3a<+\infty,$$

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n+F)\right)=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(r_n+F)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(r_n+F)=\sum_{n=1}^{\infty}m(F).$$

一方面,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(F)>0$ 推得 $m(F)>0$;另一方面,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(F)<+\infty$ 推得 $m(F)=0$,就此得到矛盾.

§10.2 有界变差函数与绝对连续函数

定义 10.2.1 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$,Δ 为 $[a,b]$ 的分划:$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,记

$$\mathrm{V}_f(\Delta):=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|,$$

则称 $\mathrm{V}_f(\Delta)$ 为 f 在分划 Δ 下对应的变差.

若 $\sup\limits_{\Delta}\{\mathrm{V}_f(\Delta)\}<+\infty$,则称 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,记 $f\in BV[a,b]$,且记

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b(f):=\sup_{\Delta}\{\mathrm{V}_f(\Delta)\},$$

并称 $\mathop{\mathrm{V}}\limits_a^b(f)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的全变差.

定义 $T_f:[a,b]\to\mathbf{R}$

$$T_f(x):=\mathop{\mathrm{V}}_a^x(f),x\in[a,b],$$

称 T_f 为 f 的全变差函数.

定义 10.2.2 设 $F:[a,b]\to\mathbf{R}$,若对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当$[a,b]$上任意有限个互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$其总长度 $\sum_k(b_k-a_k)<\delta$ 时,

$$\sum_k |F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$$

成立,则称 F 为$[a,b]$上的绝对连续函数(或全连续函数).

定义 10.2.3 设 $f\in L[a,b]$,定义 $F:[a,b]\to\mathbf{R}$

$$F(x):=\int_{[a,x]}|f|\,\mathrm{d}m,x\in[a,b],$$

则称 F 为 f 的一个不定积分.

定理 10.2.1 (1)若 $f\in BV[a,b]$,则对任意$[a_1,b_1]\subset[a,b]$,有 $f\in BV[a_1,b_1]$;另一方面,若存在 $c\in(a,b)$使得 $f\in BV[a,c]$且 $f\in BV[c,b]$,则 $f\in BV[a,b]$,且有

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\quad\left(\bigvee_x^y(f)=T_f(y)-T_f(x),a\leqslant x<y\leqslant b\right).$$

(2) 若 $f\in BV[a,b]$,且 $f\in B[a,b]$ $(|f(y)-f(x)|\leqslant T_f(y)-T_f(x),a\leqslant x<y\leqslant b)$.

(3) 若 $f,g\in BV[a,b]$,$\alpha\in\mathbf{R}$,则 $\alpha f,f+g,fg\in BV[a,b]$,且

$$\bigvee_a^b(\alpha f)=|\alpha|\bigvee_a^b(f)\quad(T_{\alpha f}(x)=|\alpha|T_f(x),x\in[a,b]);$$

$$\bigvee_a^b(f+g)\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)\quad(T_{f+g}(x)\leqslant T_f(x)+T_g(x),x\in[a,b]);$$

$$\bigvee_a^b(fg)\leqslant M_f\bigvee_a^b(g)+M_g\bigvee_a^b(f)\quad(T_{fg}(x)\leqslant M_fT_g(x)+M_gT_f(x),x\in[a,b]).$$

其中 M_f,M_g 分别为 f,g 在$[a,b]$上的界.

(4) 若 f 为$[a,b]$上的有界单调函数,则 $f\in BV[a,b]$,且

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|.$$

(5) 若 $f\in BV[a,b]$,则 f 与 T_f 具有相同的左、右连续点.

(6) (Jordan 分解) 若 $f\in BV[a,b]$,则存在$[a,b]$上的两个递增函数 g,h 使得 $f=g-h$.

证 (1)设 $\Delta_{[a_1,b_1]}$ 为$[a_1,b_1]$的任一分划,则

$$\Delta_{[a,b]}:=\Delta_{[a_1,b_1]}\cup\{a,b\}$$

为$[a,b]$的一个分划,由变差与全变差的定义,

$$\bigvee_f(\Delta_{[a_1,b_1]})\leqslant\bigvee_f(\Delta_{[a,b]})\leqslant\bigvee_a^b(f),$$

由 $\Delta_{[a_1,b_1]}$的任意性以及 $f\in BV[a,b]$,得

$$\bigvee_{a_1}^{b_1}(f)\leqslant\bigvee_a^b(f)<+\infty,$$

即得 $f\in BV[a_1,b_1]$.

又若存在 $c\in(a,b)$,$f\in BV[a,c]$且 $f\in BV[c,b]$. 设 $\Delta_{[a,b]}$为$[a,b]$的任一分划,令

$$\Delta'_{[a,b]}:=\Delta_{[a,b]}\cup\{c\}=\Delta_{[a,c]}\cup\Delta_{[c,b]},$$

则

$$\bigvee_f(\Delta_{[a,b]})\leqslant\bigvee_f(\Delta'_{[a,b]})=\bigvee_f(\Delta_{[a,c]})+\bigvee_f(\Delta_{[c,b]})\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f),$$

由 $\Delta_{[a,b]}$的任意性,得

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)<+\infty,$$

这同时说明 $f\in BV[a,b]$.

另一方面,设 $\Delta_{[a,c]}$为$[a,c]$上的任一分划,$\Delta_{[c,b]}$为$[c,b]$的任一分划,则

$$\Delta_{[a,b]}:=\Delta_{[a,c]}\cup\Delta_{[c,b]}$$

为$[a,b]$上的一个分划,于是

$$\bigvee_f(\Delta_{[a,c]})+\bigvee_f(\Delta_{[c,b]})=\bigvee_f(\Delta_{[a,b]})\leqslant\bigvee_a^b(f),$$

由 $\Delta_{[a,c]}$与 $\Delta_{[c,b]}$的任意性,得

$$\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

综合上述两个不等式,即得相应的等式.

若将 x 视为c,y 视为b,即有

$$\bigvee_x^y(f)=T_f(y)-T_f(x),\ a\leqslant x<y\leqslant b,$$

且可知

$$0\leqslant T_f(x)\leqslant T_f(y),\ a\leqslant x\leqslant y\leqslant b.$$

即,$[a,b]$上的有界变差函数 f 的全变差函数 T_f 为非负单调增有界函数.

(2) 设 $f\in BV[a,b]$.显然

$$|f(y)-f(x)|\leqslant \bigvee_x^y(f)=T_f(y)-T_f(x),a\leqslant x<y\leqslant b,$$

因此

$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+T_f(x)-T_f(a)\leqslant|f(a)|+T_f(b),\ x\in[a,b],$$

即证得 $f\in B[a,b]$.

(3) 设 Δ 为$[a,b]$的任一分划,则由变差的定义,显然有

$$\bigvee{}_{af}(\Delta)=|\alpha|\bigvee{}_f(\Delta),$$

$$\bigvee{}_{f+g}(\Delta)\leqslant\bigvee{}_f(\Delta)+\bigvee{}_g(\Delta),$$

$$\bigvee{}_{f\cdot g}(\Delta)\leqslant M_f\bigvee{}_g(\Delta)+M_g\bigvee{}_f(\Delta),$$

对上述三式两端关于 Δ 取上确界,即得所证.

(4) 事实上,由于 f 为$[a,b]$上的有界单调函数,则对$[a,b]$的任一分划 Δ,有

$$\bigvee{}_f(\Delta)=|f(b)-f(a)|,$$

于是 $f\in BV[a,b]$,且

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|.$$

(5) 一方面,由

$$|f(y)-f(x)|\leqslant T_f(y)-T_f(x),a\leqslant x<y\leqslant b,$$

即知 T_f 的左(右)连续点必为 f 的左(右)连续点.

另一方面,设 $x\in[a,b)$为 f 的右连续点,则对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $y\in(x,b]$使得

$$|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ t\in[x,y),$$

同时,存在 $\Delta_{[x,y]}:x<x+\delta<\cdots<y$,使得

$$T_f(y)-T_f(x)=\bigvee_x^y(f)<\bigvee{}_f(\Delta_{[x,y]})+\frac{\varepsilon}{2},$$

且记由此得到$[x+\delta,y]$上相应的一个分划为 $\Delta_{[x+\delta,y]}$. 于是,对于任一 $t\in[x,x+\delta)$,有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant T_f(t) - T_f(x) &\leqslant T_f(x+\delta) - T_f(x) \\
&= (T_f(y) - T_f(x)) - (T_f(y) - T_f(x+\delta)) \\
&\leqslant \bigvee_f(\Delta_{[x,y]}) + \frac{\varepsilon}{2} - \bigvee_f(\Delta_{[x+\delta,y]}) \\
&= |f(x+\delta) - f(x)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

即证得 T_f 在 x 点右连续.

同理可证 f 的左连续点也是 T_f 的左连续点.

(6) 由

$$|f(y) - f(x)| \leqslant T_f(y) - T_f(x),\ a \leqslant x < y \leqslant b,$$

可知

$$T_f(x) \pm f(x) \leqslant T_f(y) \pm f(y), a \leqslant x < y \leqslant b,$$

即 $T_f + f$ 及 $T_f - f$ 均为 $[a,b]$ 上的递增函数. 令

$$g := \frac{1}{2}(T_f + f),\ h := \frac{1}{2}(T_f - f),$$

则 g,h 即为所求.

注 Jordan 分解不是惟一的,例如,将 g,h 同加一相同的递增函数,仍然是 f 的一个 Jordan 分解. 特别地,若令

$$
\begin{aligned}
p(x) &:= (T_f(x) + f(x) - f(a))/2, \\
n(x) &:= (T_f(x) - f(x) + f(a))/2, x \in [a,b],
\end{aligned}
$$

则 $p(a) = n(a) = 0, p(x) \geqslant 0, n(x) \geqslant 0$,且有

$$T_f(x) = p(x) + n(x),\ f(x) - f(a) = p(x) - n(x),\ x \in [a,b],$$

上述 p,n 称为 f 的正规分解.

定理 10.2.2 (以下所论及的函数的定义域均为 $[a,b]$,不再一一指出.)

(1) 绝对连续函数必为一致连续函数.

(2) 绝对连续函数必为有界变差函数.

(3) 满足 Lipschitz 条件的函数必为绝对连续函数.

(4) L 可积函数 f 的不定积分 F 为绝对连续函数,且

$$\bigvee_a^b(F) = \int_{[a,b]} |f| \,\mathrm{d}m.$$

(5) 绝对连续函数的线性组合与乘积为绝对连续函数.

(6) 绝对连续函数的全变差函数为绝对连续函数.

(7) 绝对连续函数必可分解为两个递增的绝对连续函数之差.

证 (1) 由定义即知结论成立.

(2) 设 f 为$[a,b]$上的绝对连续函数,取定义中的 $\varepsilon=1$,则存在 $\delta>0$,对于$[a,b]$上任意有限个互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$,当$\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$时,

$$\sum_k|F(b_k)-F(a_k)|<1$$

成立.现取$[a,b]$的一个分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 满足 $x_k-x_{k-1}<\delta$ $(k=1,2,\cdots,n)$,则对于$[x_{k-1},x_k]$上的任一分划 Δ_k 显然有

$$\bigvee_f(\Delta_k)<1 \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant 1 \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

从而

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{k=1}^n\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\leqslant n<+\infty,$$

即证得 $f\in BV[a,b]$.

(3) 设 f 为$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件的函数,即存在常数 $L>0$,使得

$$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|,\ x,y\in[a,b],$$

则对于任一 $\varepsilon>0$,取绝对连续函数定义中的 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$即可得证.

(4) 设 $f\in L[a,b]$,F 为f 的不定积分,则对于$[a,b]$上任意有限个互不相交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$,有

$$\sum_k|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_k\left|\int_{(a_k,b_k)}f\mathrm{d}m\right|\leqslant\sum_k\int_{(a_k,b_k)}|f|\mathrm{d}m,$$

由积分的绝对连续性即知 F 为$[a,b]$上的绝对连续函数,且上式同时说明:对于$[a,b]$的任一分划 $\Delta_{[a,b]}$,均有

$$\bigvee_F(\Delta_{[a,b]})\leqslant\int_{[a,b]}|f|\mathrm{d}m,$$

从而

$$\bigvee_a^b(F)\leqslant\int_{[a,b]}|f|\,\mathrm{d}m.$$

另一方面,由 L 可积函数与阶梯函数的关系:存在阶梯函数列(φ_n)

$$\varphi_n(x):=\sum_{k=1}^{m_n}\alpha_k^{(n)}\chi_{(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]}(x),\ x\in[a,b]\quad(n=1,2,\cdots)$$

(其中 $\alpha_k^{(n)}$ 为常数,记 $\Delta_n:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots x_{m_n}^{(n)}=b$),使得

$$\varphi_n(x)\to f(x),\ m\text{-a.e.}\ 于[a,b].$$

令

$$g_n(x):=\operatorname{sgn}(\varphi_n(x))=\sum_{k=1}^{m_n}c_k^{(n)}\chi_{(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]}(x),x\in[a,b]\quad(n=1,2,\cdots)$$

(其中 $c_k^{(n)}\in\{-1,0,1\}$),则

$$|g_n(x)f(x)|\leqslant|f(x)|,x\in[a,b],$$

且由

$$\begin{aligned}|g_n(x)f(x)-|f(x)||&\leqslant|g_n(x)f(x)-g_n(x)\varphi_n(x)|\\&\quad+|g_n(x)\varphi_n(x)-|f(x)||\\&\leqslant|\varphi_n(x)-f(x)|+||\varphi_n(x)|-|f(x)||\\&\leqslant2|\varphi_n(x)-f(x)|,\end{aligned}$$

可知

$$g_n(x)f(x)\to|f(x)|\ m\text{-a.e.}\ 于[a,b].$$

于是,由控制收敛定理得

$$\int_{[a,b]}g_nf\,\mathrm{d}m\to\int_{[a,b]}|f|\,\mathrm{d}m.$$

又注意到

$$\int_{[a,b]}g_nf\,\mathrm{d}m=\sum_{k=1}^{m_n}\int_{(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]}c_k^{(n)}f\,\mathrm{d}m$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \left| \int_{(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]} f \mathrm{d}m \right| = \bigvee_F(\Delta_n) \leqslant \bigvee_a^b(F),$$

对上式左端令 $n \to \infty$，即有

$$\int_{[a,b]} |f| \mathrm{d}m \leqslant \bigvee_a^b(F).$$

由此即证得等式成立.

(5) 设 f, g 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，$\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_k, b_k)\}$，有

$$\sum_k |(\alpha f(b_k) + \beta g(b_k)) - (\alpha f(a_k) + \beta g(a_k))|$$

$$\leqslant |\alpha| \sum_k |f(b_k) - f(a_k)| + |\beta| \sum_k |g(b_k) - g(a_k)|,$$

$$\sum_k |f(b_k)g(b_k) - f(a_k)g(a_k)|$$

$$\leqslant M_f \sum_k |g(b_k) - g(a_k)| + M_g \sum_k |f(b_k) - f(a_k)|,$$

其中 M_f 与 M_g 分别表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的界，由此即知 $\alpha f + \beta g$ 与 $f \cdot g$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

(6) 设 f 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则对于任一 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对于 $[a,b]$ 中任意有限个两两不交的开区间 $(a_k, b_k)(k=1,2,\cdots,m)$，当 $\sum_{k-1}^{m}(b_k - a_k) < \delta$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由全变差的定义可知，对于每一 $\bigvee_{a_k}^{b_k}(f)$，存在

$$\Delta_{[a_k, b_k]}: a_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n_k}^{(k)} = b_k,$$

使得

$$\bigvee_{a_k}^{b_k}(f) < \bigvee_f(\Delta_{[a_k, b_k]}) + \frac{\varepsilon}{2m} = \sum_{j=1}^{n_k} |f(x_j^{(k)}) - f(x_{j-1}^{(k)})| + \frac{\varepsilon}{2m}.$$

注意到 $(x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)})(j=1,2,\cdots,n_k; k=1,2,\cdots,m)$ 仍为 $[a,b]$ 中有限个两两不交的开区间，且

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}(x_j^{(k)}-x_{j-1}^{(k)})=\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k)<\delta,$$

于是

$$\sum_{k=1}^{m}|T_f(b_k)-T_f(a_k)|=\sum_{k=1}^{m}\bigvee_{a_k}^{b_k}(f)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\bigvee{}_f(\Delta_{[a_k,b_k]})+\frac{\varepsilon}{2m}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_k}|f(x_j^{(k)})-f(x_{j-1}^{(k)})|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

此即说明 T_f 为$[a,b]$上的绝对连续函数.

(7) 由(2)、(5)、(6)以及有界变差函数的 Jordan 分解即得所证.

引理 1 若 $f\in L(E,m)$,任给 $t\in\mathbf{R}$,令 $\varphi(x):=f(x+t),x\in(-t+E)$,则 $\varphi\in L(-t+E,m)$,且

$$\int_E f\mathrm{d}m=\int_{-t+E}\varphi\mathrm{d}m.$$

证 由于 $E\in\mathscr{L}$,于是由 Lebesgue 测度的平移不变性知,任给 $t\in\mathbf{R}$,必有 $(-t+E)\in\mathscr{L}$,且 $m(-t+E)=m(E)$.注意到,对于任一 $a\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}(-t+E)(\varphi>a)&=\{x\mid x\in(-t+E)\text{ 且 }\varphi(x)>a\}\\&=\{x\mid x\in(-t+E)\text{ 且 }f(x+t)>a\}\\&=\{x\mid x\in E\text{ 且}f(x)>a\}=E(f>a)\in\mathscr{L},\end{aligned}$$

因此 φ 为$(-t+E)$上的 $\mathscr{L}$ 可测函数.

若 $f=\chi_A$(A 为E 的可测子集),则

$$\varphi(x)-f(x+t)=\chi_A(x+t)=\chi_{(-t+A)}(x),\ x\in(-t+E),$$

$$\int_{-t+E}\varphi\mathrm{d}m=\int_{-t+E}\chi_{(-t+A)}\mathrm{d}m=m((-t+A)\cap(-t+E))$$

$$=m(-t+A)=m(A)=\int_E\chi_A\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m,$$

由此即知,当 f 为E 上的非负简单函数时成立$\int_{-t+E}\varphi\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m$.

当 f 为E 上的非负 $\mathscr{L}$ 可测函数时,由可测函数与简单函数的关系可知,存在 E 上的非负简单函数列(f_n)使得

$$f_n(x)\uparrow f(x),\ x\in E.$$

显然,相应的 $\varphi_n(x):=f_n(x+t)$满足

$$\varphi_n(x)=f_n(x+t)\uparrow f(x+t)=\varphi(x),x\in(-t+E).$$

于是由 Levi 定理及上述已证之结论,有

$$\int_{-t+E}\varphi\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_{-t+E}\varphi_n\mathrm{d}m=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m.$$

由此易知,当 $f\in L(E,m)$ 时仍有 $\int_{-t+E}\varphi\mathrm{d}m=\int_E f\mathrm{d}m$.

引理 2　**R** 上的有限值单调函数 m-a.e.存在导数.

尽管引理 2 是实变函数论中的重要结论,但其证明过于冗长,故证略.

定理 10.2.3　设 f 为$[a,b]$上的有界单调增函数,在 f 的导数不存在的点 x 处规定$f'(x)$为任一值,则 $f'\in L[a,b]$(从而 $f'(x)$在$[a,b]$上 m-a.e.有限),且

$$\int_{[a,b]}f'\mathrm{d}m\leqslant f(b)-f(a).$$

证　首先将 f 延拓为$[a,b+1]$上函数,其中规定 $f(x)=f(b)(x\in[b,b+1])$.令

$$g_n(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right),\ x\in[a,b]\quad(n=1,2,\cdots).$$

由 f 为$[a,b]$上的有界单调函数可知 $f\in L[a,b]$,$g_n(x)\geqslant 0$,且由引理 1 知 $g_n\in L[a,b]$.又由引理 2 知

$$g_n(x)\to f'(x)\ m\text{-a.e.于}[a,b],$$

且由 Lebesgue 测度的完备性可知 f' 可测.于是再由引理 1 及 Fatou 定理,有

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_{[a,b]}f'\mathrm{d}m&=\int_{[a,b]}(\lim_{n\to\infty}g_n)\mathrm{d}m\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{[a,b]}g_n\mathrm{d}m\\&=\varliminf_{n\to\infty}n\left(\int_{\left[a+\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right]}f\mathrm{d}m-\int_{[a,b]}f\mathrm{d}m\right)\\&=\varliminf_{n\to\infty}\left(n\int_{\left[b,b+\frac{1}{n}\right]}f\mathrm{d}m-n\int_{\left[a,a+\frac{1}{n}\right]}f\mathrm{d}m\right)\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\left(f\left(b+\frac{1}{n}\right)-f(a)\right)=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

推论　若 f 为$[a,b]$上的有界变差函数或绝对连续函数,则 f 在$[a,b]$

上 m-a.e.存在有限导数.若在 f' 不存在的点 x 处规定 $f'(x)$ 为任一值,则 $f'\in L[a,b]$.

证 由有界变差函数的 Jordan 分解定理、一般可测函数可积的定义以及定理 10.2.3 即可得证.

引理 3 若 F 为$[a,b]$上的绝对连续函数,且 $F'(x)=0$ m-a.e.于$[a,b]$,则 F 为常值函数.

证 我们往证 $F(x)=F(a)\quad(x\in[a,b])$,注意到,在引理所设条件下,对于任一 $x\in(a,b]$,则 F 必为$[a,x]$上的绝对连续函数,故只需证明 $F(b)=F(a)$即可.

由 F 为$[a,b]$上绝对连续函数的定义,对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$只有,对于$[a,b]$上任意有限个两两不交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$,当$\sum_k(b_k-a_k)<\delta$时,有

$$\sum_k|F(b_k)-F(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $F'(x)=0$ m-a.e.于$[a,b]$可知,存在 m-零测集 E_0(设 $a,b\in E_0$)使得

$$F'(x)=0,x\in[a,b]\setminus E_0.$$

可知,对于任一 $x\in[a,b]\setminus E_0$,存在 $\delta_x>0$,使得$[x-\delta_x,x+\delta_x]\subset(a,b)$且成立

$$|F(t)-F(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}|t-x|,\ t\in[x-\delta_x,x+\delta_x].$$

对 m-零测集 E_0,必存在 $\mathbf{R}$ 上的开集 $G:=\bigcup_j(\alpha_j,\beta_j)$使得 $G\supset E_0$,$m(G)<\delta$(其中(α_j,β_j)为 G 的构成区间).

由此得到 $\mathbf{R}$ 上的覆盖了有界闭区间$[a,b]$的开区间族

$$\mathcal{G}:=\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\mid x\in[a,b]\setminus E_0\}\cup\{(\alpha_j,\beta_j)\},$$

由有限覆盖定理,存在 $I_k:=(y_k-r_k,y_k+r_k)\in\mathcal{G}\quad(k=1,2,\cdots,n)$使得

$$\bigcup_{k=1}^n I_k\supset[a,b],$$

且 I_k 只与足标与其相邻的I_{k-1}与 I_{k+1}相交,只有 I_1 含有 a,只有 I_n 含有b,即

$$y_1-r_1<a<y_2-r_2<y_1+r_1<y_3-r_3<y_2+r_2<\cdots$$

$$< y_n - r_n < y_{n-1} + r_{n-1} < b < y_n + r_n .$$

则 $I_k(k=2,3,\cdots,n)$的左端点及 a,b 两点就构成了$[a,b]$的一个分划:

$$a < y_2 - r_2 < y_3 - r_3 < \cdots < y_k - r_k < y_{k+1} - r_{k+1} < \cdots$$
$$< y_n - r_n < b.$$

现对此分划中的点做如下增删:

若 $I_k \notin \{(\alpha_j,\beta_j)\}$,则将 y_k 添加到分划中,且此时若 $y_{k+1}-r_{k+1}<y_k$,则删去 $y_{k+1}-r_{k+1}$.

经上述增删后的$[a,b]$的分划记为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b.$$

令

$$\Lambda_1 := \{i \mid (x_{i-1},x_i) \subset G, i \in \{1,2,\cdots,m\}\},$$
$$\Lambda_2 := \{1,2,\cdots,m\} \setminus \Lambda_1,$$

则有

$$\sum_{i\in\Lambda_1}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_j(\beta_j - \alpha_j) = m(G) < \delta.$$

注意到,当 $i\in\Lambda_2$ 时,则区间$[x_{i-1},x_i]$的左、右端点之一必属于$[a,b]\setminus E_0$. 若 $x_i\in[a,b]\setminus E_0$,则 $x_{i-1}x_i-\delta_{x_i}$;若 $x_{i-1}\in[a,b]\setminus E_0$ 时,则 $x_i<x_{i-1}+\delta_{x_{i-1}}$. 于是

$$| F(x_i) - F(x_{i-1}) | < \frac{\varepsilon(x_i - x_{i-1})}{2(b-a)}, i \in \Lambda_2.$$

从而有

$$\begin{aligned}
| f(b) - f(a) | &\leqslant \sum_{i=1}^m | F(x_i) - F(x_{i-1}) | \\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda_1} | F(x_i) - F(x_{i-1}) | + \sum_{i\in\Lambda_2} | F(x_i) - F(x_{i-1}) | \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i\in\Lambda_2}(x_i - x_{i-1}) \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

再由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得 $f(b)=f(a)$.

定理 10.2.4(微积分基本定理) F 为$[a,b]$上的绝对连续函数的充要条件是存在 $f\in L[a,b]$使得

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f\mathrm{d}m,\ x \in [a,b].$$

此外还有

$$F'(x) = f(x)\,m\text{-a.e.}\ 于[a,b].$$

证 充分性. 设 $f \in L[a,b]$,则对于$[a,b]$中任意有限个两两不交的开区间$\{(a_k,b_k)\}$,有

$$\sum_k |F(b_k) - F(a_k)| = \sum_k \left| \int_{(a_k,b_k]} f\mathrm{d}m \right| \leqslant \sum_k \int_{(a_k,b_k]} |f|\,\mathrm{d}m = \int_E |f|\,\mathrm{d}m,$$

其中 $E = \bigcup\limits_k (a_k,b_k]$. 注意到

$$\sum_k (b_k - a_k) = m(E),$$

则由绝对连续函数的定义与积分的绝对连续性即知 F 为$[a,b]$上的绝对连续函数.

必要性. 设 F 为$[a,b]$上的绝对连续函数,则由定理 10.2.3 之推论,存在 $f \in L[a,b]$使得 $F'(x) = f(x)\,m$-a.e. 于$[a,b]$. 现令

$$G(x) = \int_{[a,x]} f\mathrm{d}m,\ x \in [a,b],$$

$$H(x) = F(x) - G(x),$$

则由定理 10.2.2(5)及上述充分性之论证可知 H 为$[a,b]$上的绝对连续函数.

注意到,若成立

$$G'(x) = f(x)\ m\text{-a.e.}\ 于[a,b], \tag{*}$$

则有

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0\ m\text{-a.e.}\ 于[a,b].$$

于是由引理 3,

$$H(x) = C, x \in [a,b]$$

(其中 C 为常数),即

$$F(x) = \int_{[a,x]} f\mathrm{d}m + C,\ x \in [a,b],$$

特别取 $x = a$,即得 $C = F(a)$.

以下就来证明(*)式.

首先,对于任一 $\varphi\in L[a,b]$,

$$\Phi'(x):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{[a,x]}\varphi\mathrm{d}m$$

在$[a,b]$上 m-a.e.存在,$\Phi'\in L[a,b]$.令

$$\Phi_1(x)=\int_{[a,x]}\varphi^+\mathrm{d}m,\ \Phi_2(x)=\int_{[a,x]}\varphi^-\mathrm{d}m,\ x\in[a,b],$$

则 Φ_1,Φ_2 为$[a,b]$上绝对连续的单调增函数.由定理 10.2.3 及其推论推得

$$\int_{[a,b]}|\Phi'|\mathrm{d}m=\int_{[a,b]}|\Phi_1'-\Phi_2'|\mathrm{d}m\leqslant\int_{[a,b]}(\Phi_1'+\Phi_2')\mathrm{d}m$$

$$\leqslant\Phi_1(b)+\Phi_2(b)=\int_{[a,b]}(\varphi^++\varphi^-)\mathrm{d}m=\int_{[a,b]}|\varphi|\mathrm{d}m.$$

现对 $f\in L[a,b]$,由 L 可积函数与连续函数的关系,对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\psi\in C[a,b]$使得

$$\int_{[a,b]}|f-\psi|\mathrm{d}m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 L 积分与R 积分的关系,有

$$\Psi'(x):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{[a,x]}\psi\mathrm{d}m=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\psi(t)\mathrm{d}t=\psi(x),\ x\in[a,b].$$

从而有

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]}|G'-f|\mathrm{d}m&\leqslant\int_{[a,b]}|G'-\Psi'|\mathrm{d}m+\int_{[a,b]}|\psi-f|\mathrm{d}m\\&=\int_{[a,b]}|(G-\Psi)'|\mathrm{d}m+\int_{[a,b]}|\psi-f|\mathrm{d}m\\&\leqslant2\int_{[a,b]}|f-\psi|\mathrm{d}m<\varepsilon,\end{aligned}$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得所证.

至此定理证毕.

注 由有界变差函数的 Jordan 分解可知,对于 $g\in BV[a,b]$必对应一个有限广义 L-S 测度 m_g(即两个有限 L-S 测度之差).我们不加证明地给出如下推论,它说明了函数的绝对连续性与其相应的广义 L-S 测度的绝对连续性的关系.

推论 设连续函数 $F\in BV[a,b]$，且对应的有限广义 L-S 测度为 m_F，则 F 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充要条件是 $m_F\ll m$.

例 1 设 (u_n) 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数列，若

(1) 存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[a,b]}|u_n'|\,\mathrm{d}m$ 收敛，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于绝对连续函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\quad m\text{-a.e. 于}[a,b].$$

证 由条件(2)可知(参见习题 5.17)，存在 $S\in L[a,b]$ 使得

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),\ x\in[a,b],$$

$$\int_{E(x)}S\,\mathrm{d}m=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E(x)}u_n'\,\mathrm{d}m,\ E(x):=[x_0,x]\text{ 或 }[x,x_0],\ x\in[a,b].$$

由于 u_n 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，因此由定理 10.2.4，

$$u_n(x)=u_n(x_0)+\int_{E(x)}u_n'\,\mathrm{d}m,\ x\in[a,b]\quad(n=1,2,\cdots),$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E(x)}u_n'\,\mathrm{d}m\\&=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)+\int_{E(x)}S\,\mathrm{d}m,\ x\in[a,b].\end{aligned}$$

令

$$U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)+\int_{E(x)}S\,\mathrm{d}m,\ x\in[a,b],$$

则再次由定理 10.2.4 可知，U 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=U'(x)=S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\quad m\text{-a.e. 于}[a,b].$$

§10.3 Riemann-Stieltjes 积分

在本节中，介绍 R 积分的另一种推广——R-S 积分的概念，并将不加证明地给出有关的一系列定理. 相信对于 R 积分理论有一定基础的读者，不难对其中大多数定理自行给出证明. 在此，提请读者特别注意 R-S 积分与 R 积分的不同之处.

定义 10.3.1 设 α 为 $[a,b]$ 上的有界单调增函数. 对应于 $[a,b]$ 的每个分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记

$$\Delta\alpha_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}).$$

设 f 为 $[a,b]$ 上的有界实值函数，

$$U(f,\Delta,\alpha) := \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\alpha_k, L(f,\Delta,\alpha) := \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\alpha_k$$

分别称为 f 关于 Δ 与 α 的 Darboux 上、下和，其中 $M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k])$，$m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k])$. 记

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}\alpha(x) := \inf_{\Delta} U(f,\Delta,\alpha), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}\alpha(x) := \sup_{\Delta} L(f,\Delta,\alpha).$$

若

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}\alpha(x),$$

则公共值记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$，且称之为 f 在 $[a,b]$ 上关于 α 的 Riemann-Stieltjes 积分；这时称 f 在 $[a,b]$ 上（关于 α）R-S 可积，记为 $f \in R([a,b];\alpha)$.

定理 10.3.1 $f \in R([a,b];\alpha)$ 的充要条件是对任一 $\varepsilon > 0$，存在分划 Δ，使得

$$U(f,\Delta,\alpha) - L(f,\Delta,\alpha) < \varepsilon.$$

定理 10.3.2 若 $f \in C[a,b]$，则 $f \in R([a,b];\alpha)$. 且对于任一 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对 $[a,b]$ 的任一分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\ \|\Delta\| := \max_{1 \le k \le n} \{x_k - x_{k-1}\} < \delta,$$

以及在分划 Δ 下的任一介点集

$$\xi := \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}（其中\ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \cdots, n）,$$

均有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\alpha_k - \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) \right| < \varepsilon.$$

定理 10.3.3 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界单调函数，α 为 $[a,b]$ 上的有界递增连续函数，则 $f \in R([a,b];\alpha)$.

定理 10.3.4 (1) 若 $f_1, f_2 \in R([a,b];\alpha)$，则 $f_1 + f_2 \in R([a,b];\alpha)$，且

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\mathrm{d}\alpha(x) = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}\alpha(x) + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

(2) 若 $f \in R([a,b];\alpha)$，c 为常数，则 $cf \in R([a,b];\alpha)$，且

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}\alpha(x) = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

(3) 若 $f_1, f_2 \in R([a,b];\alpha)$，$f_1(x) \leqslant f_2(x)$，则

$$\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}\alpha(x) \leqslant \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

(4)若 $f \in R([a,b];\alpha)$，$a < c < b$，则 $f \in R([a,c];\alpha)$，$f \in R([c,b];\alpha)$，且有

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}\alpha(x) + \int_c^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

(5) 若 $f \in R([a,b];\alpha_1)$，$f \in R([a,b];\alpha_2)$，则 $f \in R([a,b];\alpha_1 + \alpha_2)$，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha_1(x) + \int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha_2(x).$$

(6) 若 $f \in R([a,b];\alpha)$，c 为正常数，则 $f \in R([a,b];c\alpha)$，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}(c\alpha(x)) = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

定理 10.3.5 设 $f \in R([a,b];\alpha)$，$f(x) \in [m,M]$ $(x \in [a,b])$，$g \in C[m,M]$，则 $g \circ f \in R([a,b];\alpha)$.

定理 10.3.6 若 $u\in R([a,b];\alpha)$, $v\in R([a,b];\alpha)$, 则

(1) $uv\in R([a,b];\alpha)$;

(2) $|u|\in R([a,b];\alpha)$, 且 $\left|\int_a^b u(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right|\leqslant\int_a^b |u(x)|\mathrm{d}\alpha(x)$.

定义 10.3.2 设 f 为$[a,b]$上的有界函数,α 为$[a,b]$上的有界单调增函数.对$[a,b]$的任一分划 Δ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,任取介点集 $\xi:=\{\xi_1,\cdots,\xi_n\}$,作和

$$\sigma(f,\Delta,\alpha)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta\alpha_k,$$

则称 $\sigma(f,\Delta,\alpha)$为 f 关于 Δ 与 α 的 Riemann-Stieltjes 和.

设 $l\in\mathbf{R}$,若对于任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对于任一满足 $\|\Delta\|<\delta$ 的分划 Δ 以及分划 Δ 下的任一介点集 ξ,均有

$$|\sigma(f,\Delta,\alpha)-l|<\varepsilon,$$

则记作

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sigma(f,\Delta,\alpha)=l.$$

定理 10.3.7 若 f 与α 有公共的间断点$c\in[a,b]$,则 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to0}\sigma(f,\Delta,\alpha)$不存在.

定理 10.3.8 (1) 若 $\lim\limits_{\|\Delta\|\to0}\sigma(f,\Delta,\alpha)$存在,则 $f\in R([a,b];\alpha)$,且

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sigma(f,\Delta,\alpha)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

(2) 若(i)$f\in C[a,b]$,或(ii)$f\in R([a,b];\alpha)$且 α 在$[a,b]$上连续单调增,则上式成立.

注 有些教材将满足定义 10.3.2 条件的函数 f 称为在$[a,b]$上(关于 α)R-S 可积,且将上述的极限值 l 称为f 在$[a,b]$上关于 α 的R-S 积分.需要指出的是,定义 10.3.1 与定义 10.3.2 并不等价(参见上述两个定理).

定义 10.3.3 若 $\alpha\in BV[a,b]$, $\alpha=\beta-\gamma$,此处 β,γ 为 α 的 Jordan 分解.如果下式右端的两个积分存在,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x):=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\beta(x)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}\gamma(x).$$

注 在下述两种情形下,则上述积分必存在:

(i) $f\in C[a,b]$, $\alpha\in BV[a,b]$;

(ii) $f,\alpha\in BV[a,b]$,且 $\alpha\in C[a,b]$.

定理 10.3.9 设 f,α 满足上述注的(i)或(ii). T_α 为 α 在 $[a,b]$ 上的全变差函数,则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}T_\alpha(x).$$

推论 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right| \leqslant \bigvee_a^b(\alpha) \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}.$

定理 10.3.10 设 $f,\alpha\in BV[a,b]$, $f\in C[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)\mathrm{d}f(x).$$

注 若 $f\in C[a,b]$, $\alpha\in BV[a,b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)$ 存在. 于是,即使 $f\notin BV[a,b]$,定理 10.3.10 也可以用来定义积分 $\int_a^b \alpha(x)\mathrm{d}f(x)$.

定理 10.3.11 若 $f\in C[a,b]$, α 在 $[a,b]$ 上有界单调增,则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = f(\xi)(\alpha(b)-\alpha(a)).$$

定理 10.3.12 若 f 在 $[a,b]$ 上单调, $\alpha\in BV[a,b]$ 且 $\alpha\in C[a,b]$,则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = f(a)(\alpha(\xi)-\alpha(a)) + f(b)(\alpha(b)-\alpha(\xi)).$$

定理 10.3.13 设 $f,g\in C[a,b]$, g 严格递增, h 是 g 的反函数,记 $g(a)=c$, $g(b)=d$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_c^d f(h(y))\mathrm{d}h(y).$$

定理 10.3.14 若 $f,\alpha'\in R[a,b]$,则 $f\in R([a,b];\alpha)$,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\mathrm{d}x.$$

定理 10.3.15 设 $f\in C[a,b]$, $\alpha\in BV[a,b]$, T_α 为 α 在 $[a,b]$ 上的全变差函数. 定义

$$F(a)=0,\ F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}\alpha(t)\quad (a < x\leqslant b),$$

则 $F \in BV[a,b]$，且 $\bigvee_a^x(F) \leqslant \int_a^x |f(t)| \mathrm{d}T_\alpha(t)$ $(x \in [a,b])$。此外，有

$$F(x+0)-F(x)=f(x)(\alpha(x+0)-\alpha(x)), a \leqslant x < b;$$

$$F(x)-F(x-0)=f(x)(\alpha(x)-\alpha(x-0)), a < x \leqslant b.$$

定理 10.3.16 设 f, α, T_α, F 如定理 10.3.15，则

$$\bigvee_a^b(F)=\int_a^b |f(t)| \mathrm{d}T_\alpha(t).$$

定理 10.3.17 设 f 在$[a,b]$上有界，α 在$[a,b]$上有界单调增。则下列陈述等价：

(1) $f \in R([a,b];\alpha)$。

(2) 存在实数 $l\left(\text{即}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)\right)$，有下列性质：$\forall \varepsilon>0$，存在$[a,b]$的分划 Δ_ε，使得对 Δ_ε 的任一加细 Δ 及分划 Δ 下的任一介点集 ξ，有

$$|\sigma(f,\Delta,\alpha)-l|<\varepsilon.$$

(3) 对于任一 $\varepsilon>0$，存在分划 Δ_ε，对于 Δ_ε 的任一加细 Δ，均有

$$0 \leqslant U(f,\Delta,\alpha)-L(f,\Delta,\alpha)<\varepsilon.$$

定理 10.3.18 设 $\alpha \in BV[a,b]$，$f_n \in C[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$，$(f_n(x))$ 在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}\alpha(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

定理 10.3.19 设 $f \in C[a,b]$，$\alpha_n \in BV[a,b]$ $(n=1,2,\cdots)$，$(\alpha_n(x))$ 在$[a,b]$上处处收敛于 $\alpha(x)$，且存在常数 $K>0$，使得 $\bigvee_a^b(\alpha_n) \leqslant K$ $(n=1,2,\cdots)$，则 $\alpha \in BV[a,b]$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha_n(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x).$$

§10.4 空间 $C[a,b]$上有界线性泛函的表示

定理(Riesz) A 为 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函的充要条件是存在 $\alpha \in BV[a,b]$使得

[General Information]

□□=□□□□□□□□□□□□ □□□

□□=□□□□

□□=212

SS□=10912331

DX□=

□□□□=2002□05□□1□

□□□=□□□□□